$\boxed{\text{A}}$

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ 1ο Εξάμ. - Φεβρουάριος 2002

Γραμμική Άλγεβρα - Αναλυτική Γεωμετρία

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. Δίνεται η ευθεία (ε): $\dfrac{x-1}{4} = y-1 = -z$ και το επίπεδο (π): $x-y-z=12$.
(i) Να βρεθεί το σημείο τομής της (ε) με το (π).
(ii) Η προβολή (ε_1) της (ε) στο (π).
(iii) Η συμμετρική ευθεία (ε') της (ε) ως προς το (π).

Θ2. Δίνεται η καμπύλη (c): $x^2+y^2-z^2=1, \quad x-y+z=0.$
(i) Να βρεθεί η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας που έχει οδηγό την (c) και γενέτειρες παράλληλες προς το διάνυσμα $\mathbf{k}=(0,\ 0,\ 1)$.
(ii) Να βρεθεί η προβολή της (c) στο επίπεδο xOy και να σχεδιαστεί πρόχειρα.
(iii) Να αναγνωριστούν και σχεδιαστούν χωριστά οι επιφάνειες που ορίζουν την καμπύλη (c).

Θ3. α) Ηλεκτρικό κύκλωμα αποτελείται από δύο επιμέρους κυκλώματα: ένα "έν σειρά" και ένα "έν παραλλήλω". Να προσδιοριστούν οι πίνακες μεταφοράς $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_2 & 1 \end{bmatrix}$ των δύο αυτών κυκλωμάτων, ώστε ο πίνακας μεταφοράς του αρχικού να είναι ο $A = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -1/2 & 5 \end{bmatrix}$, δηλαδή να ισχύει $A = A_2A_1$.
β) Έστω $V_1 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x-y-w=0\}$ και $V_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y+z=0,\ x+w=y\}$. Δείξτε ότι τα σύνολα V_1, V_2 είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ και βρείτε βάσεις και διαστάσεις των υποχώρων $V_1, V_2, V_1 \cap V_2, V_1+V_2$.
γ) Έστω $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & -4 & 10 \end{bmatrix}$. Να βρεθούν τα διανύσματα $Y = [y_1\ y_2\ y_3\ y_4]^\top$ για τα οποία το σύστημα $AX=Y$, όπου $X=[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^\top$, είναι συμβιβαστό. Δείξτε ότι το σύνολο όλων αυτών των Y είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης δύο. Να λύσετε το σύστημα αν $Y=[1\ \ 0\ \ 2\ \ 3]^\top$

Θ4. α) Να δειχθεί ότι αν ο $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ιδιοτιμή ενός πίνακα A τότε ο λ^k είναι ιδιοτιμή του A^k. Συμπεράνατε ότι, αν $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ τότε ο $p(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $p(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I$.
β) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. **i)** Να βρεθεί μία διαγωνοποίησή του και να δειχθεί ότι $A^{2n}=I$, $A^{2n+1}=A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
ii) Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα $B = 2A^3+3A^2-I$.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

Καλή Επιτυχία!