$\boxed{\text{B}}$

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ 1ο Εξάμ. - Φεβρουάριος 2003

Γραμμική Άλγεβρα - Αναλυτική Γεωμετρία

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. Ι. Δίνεται η ευθεία (ε): $3x - 2y + 2z = 3,\ y - x - z = -1$.
α) Να δειχθεί ότι η (ε) είναι παράλληλη προς το επίπεδο (π): $x - y + z = 2$.
β) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $P_0(0, 1, 0)$ από την (ε).
ΙΙ. Δίνεται ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$: $V = \{(x, y, z) :\ x + z = 0,\ x - y + 2z = 0\}$. Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^{\perp}$ του V καθώς και μία ορθοκανονική βάση του $V^{\perp}$.

Θ2. Δίνεται η καμπύλη (c): $y = 9 - x^2 - z^2, \quad 3y + z = 18$.
i) Να βρεθεί η κωνική επιφάνεια με οδηγό την (c) και κορυφή το σημείο $K(0, 0, 0)$.
ii) Να βρεθεί η κυλινδρική επιφάνεια με οδηγό την (c) και γενέτειρες παράλληλες προς τον άξονα $y'y$.
iii) Να βρεθεί η προβολή της (c) στο επίπεδο xOz και να γίνει μία πρόχειρη σχεδίαση των καμπύλων και επιφανειών που αναφέρονται στο θέμα.

Θ3. Έστω $A \in \Pi_3(\mathbb{R})$ ένας 3×3 πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -3$ και με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα: $X_1 = [0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]^{\top}$, $X_2 = [1, 0, 0]^{\top}$, $X_3 = [0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]^{\top}$.
i) Αν $P = [X_1, X_2, X_3]$ είναι ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A, να δείξετε ότι ο P είναι ορθογώνιος, δηλαδή ισχύει $P^{\top}P = PP^{\top} = I$.
ii) Να δικαιολογήσετε γιατί ο A διαγωνοποιείται. Να βρεθεί μία διαγωνοποίηση του A, η ορίζουσά του και ο ίδιος ο πίνακας A. Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα $B = A^3 - 2I$.
iii) Να βρείτε τη γραμμική απεικόνιση $T :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, που ορίζει ο A ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

Θ4. α) i) Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ για τα οποία το σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &= a_1 \\ -4x_1 + 3x_2 &= a_2 \\ 2x_1 + 3x_2 &= a_3 \end{aligned}$$

είναι συμβιβαστό, αποτελούν υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$, διάστασης 2.
ii) Να βρείτε μία βάση και τη διάσταση του υποχώρου V του $\mathbb{R}^4$, όπου

$$V = \{(b - 3c + 6d\ ,\ 5b + 4a\ ,\ c - 2d - a\ ,\ 5a) :\ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

β) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. **i)** Να βρεθεί μία διαγωνοποίησή του.
ii) Να βρεθεί ένας πίνακας M τέτοιος ώστε: $M^3 = A$.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

Καλή Επιτυχία!