A

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ 2ο Εξάμ. κανονική εξέταση - Ιούνιος 2005
Ανάλυση ΙΙ - Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

1. α) Το ηλεκτροστατικό πεδίο $\mathbf{E}$ που προέρχεται από δυναμικό $\phi(x,y,z)$, δίνεται από τον τύπο $\mathbf{E}=-\nabla\phi$. Για ένα δίπολο ροπής m, τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων και κατά μήκος του άξονα $y'y$ είναι $\phi(x,y,z)=\dfrac{m}{4\pi\varepsilon}\dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, όπου ε σταθερά. Να βρείτε το $\mathbf{E}$ στο σημείο $P(1,1,1)$.
(β: 0.5)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $F(x,y,z)=x^2z+y^2-z^4+1=0$ ορίζει, υπό πλεγμένη μορφή, συνάρτηση $z=z(x,y)$ σε μια περιοχή του σημείου $(0,0)$ με $z(0,0)=1$.
i) Να χαρακτηρίσετε τα κρίσιμα σημεία της z. **(β: 1.0)**
ii) Να γραφτεί ο τύπος Taylor 2ης τάξης για την $z(x,y)$ στο σημείο $(0,0)$. **(β: 0.5)**
γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y,z)=x^3y-e^{yz}+xz^2$ και η καμπύλη $\mathbf{r}(t)=t^2\mathbf{i}+(t-1)\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$. Δείξτε ότι είναι $\mathbf{r}'(1)=(2,1,2)$ και υπολογίστε την κατευθυνόμενη παράγωγο της f στο σημείο $(2,1,0)$ ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{u}=\mathbf{r}'(1)$. **(β: 0.5)**

2. α) Να εξετάσετε τα ακρότατα της συνάρτησης $f=\mathrm{div}\mathbf{F}$, όπου $\mathbf{F}=\frac{1}{4}x^4\mathbf{i}+\frac{1}{3}y^3\mathbf{j}$, στο χωρίο $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\}$. **(β: 1.2)**
β) Αν $f=g\left(\dfrac{y-x}{xy},\dfrac{z-x}{xz}\right)$ δείξτε ότι ισχύει $x^2\frac{\partial f}{\partial x}+y^2\frac{\partial f}{\partial y}+z^2\frac{\partial f}{\partial z}=0$. **(β: 0.5)**
γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x|y|^k}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ για κάποιο $k\in\{0,1,2,...\}$.
i) Βρείτε την ελάχιστη τιμή του k ώστε η f να είναι συνεχής.
ii) Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(2,1)$, όταν $k=3$.
(β: 0.8)

3. α) Έστω $\partial\Omega$ το σύνορο του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραμμές $\sqrt{3}\,y=x$, $x^2+y^2=4$, $y=x$ $(x>0)$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\oint_{\partial\Omega}xy\mathrm{d}y-xy\mathrm{d}x$ και να επαληθευθεί το αποτέλεσμα μ' ένα διπλό ολοκλήρωμα. **(β: 1.2)**
β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\iint_{\Omega}x(x+y)^{-2}e^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, όπου Ω το χωρίο που περιγράφεται με τις ανισότητες $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x+y\le 2$, θέτοντας $x+y=v$, $2y=uv$. **(β: 1.3)**

4. α) Έστω το πεδίο $\mathbf{F}=(yz+2x)\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+(xy+2z)\mathbf{k}$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{\widehat{ABC}}\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{r}$, όταν η διαδρομή $\widehat{ABC}$ αποτελείται από το τόξο AB της παραβολής $x^2=1-y$, $z=1$ με άκρα τα σημεία $A(0,1,1)$, $B(1,0,1)$ και από το ευθύγραμμο τμήμα BC με άκρα τα σημεία $B(1,0,1)$ και $C(0,0,2)$. Να εξεταστεί αν η εξίσωση $\nabla f=\mathbf{F}$, όπου f είναι C^2-τάξης, έχει λύση. Χωρίς να βρεθεί η f να υπολογιστούν οι τιμές $f(1,0,1)$ και $f(0,0,2)$, αν $f(0,1,1)=2$. Να επαληθευθούν τα αποτελέσματα υπολογίζοντας την f. **(β: 1.8)**
β) Έστω το πεδίο $\mathbf{a}=(x,-y,1)$. Να εξεταστεί αν η εξίσωση $\nabla\times\mathbf{b}=\mathbf{a}$, όπου $\mathbf{b}$ είναι C^2-τάξης, έχει λύση. Χωρίς να βρεθεί η $\mathbf{b}$ να υπολογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος $\oint_{\partial\varepsilon^+}(\mathbf{b}+\nabla f)\mathrm{d}\mathbf{r}$, όπου f είναι C^2-τάξης αυθαίρετη βαθμωτή συνάρτηση και $\varepsilon:\ x^2+y^2\le 1,\ z=1$. **(β: 0.7)**

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ