A

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ 2ο Εξάμ. επαναληπτική εξέταση - Σεπτέμβριος 2005
Ανάλυση ΙΙ - Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

1. α) Να υπολογίσετε τον τύπο Taylor 3ης τάξης, για την συνάρτηση $f(x,y)=e^x \sin y$, στο σημείο $(0,0)$. **(β: 1.0)**

β) (i) Το σημείο $P(1,-1,2)$ ανήκει στην καμπύλη (c), που ορίζεται ως τομή του παραβολοειδούς $F(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$ και του ελλειψοειδούς $G(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-9=0$. Να βρείτε τα κάθετα διανύσματα των επιφανειών αυτών στο σημείο P και κατόπιν το εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{n}=\nabla F(P)\times\nabla G(P)$ της καμπύλης (c) στο σημείο P. **(β: 0.7)**

(ii) Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y,z)=\sqrt{xy^2z^3}$. Να βρείτε, δικαιολογώντας τις ενέργειές σας, τον μέγιστο ρυθμό μεταβολής της f στο σημείο $P(2,2,2)$ και την κατεύθυνση ως προς την οποία αυτό συμβαίνει. **(β: 0.8)**

2. α) (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x,y,z)=xy+yz-xz$ έχει τοπικά ακρότατα. **(β: 0.7)**

(ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $F(x,y,z)=z^3+xz-y^2-1=0$ ορίζει, υπό πλεγμένη μορφή, συνάρτηση $z=z(x,y)$ σε μια περιοχή του σημείου $(1,3)$ με $z(1,3)=2$. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο της γραφικής παράστασης της $z(x,y)$ στο σημείο $(1,3,2)$. **(β: 0.8)**

β) Να μελετήσετε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y,z)=x^2-yz$ στα σημεία της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$. **(β: 1.0)**

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{y^2-1}^{1-y^2}(y+x)\mathrm{d}x$.
Να επαληθευθεί το αποτέλεσμα:

(i) Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης.

(ii) Με ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_{\mathbf{k}} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$, αν $Q_x=y$. **(β: 2.5)**

4. α) Έστω το πεδίο $\mathbf{F}=\nabla f$, όπου $f\in C^2$ στο $\mathbb{R}^3$. Να δειχτεί ότι κατά μήκος της έλικας $k_1:\ \mathbf{r}=(\cos t,\sin t,\alpha t)$ και του ευθυγράμμου τμήματος $k_2:\ \mathbf{r}=(1,\,0,\,\alpha t)$, $0\le t\le 2\pi$ ισχύει η σχέση: $\int_{k_1}\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_{k_2}\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{r}$. Αν $\mathbf{F}=(xy+\frac{z^2}{\alpha},\,yz+\frac{x^2}{\beta},\,zx+\frac{y^2}{\gamma}$, να προσδιοριστούν οι αριθμοί α,β,γ έτσι ώστε να είναι $\mathbf{F}=\nabla f$ και κατόπιν να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{k_1}\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{r}$ **(β: 1.3)**

β) Έστω το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{a}=(x^2-3x+1,\,y,\,c(x)z)$. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $c(x)$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $\mathbf{a}=\mathrm{rot}\boldsymbol{\beta}$. Να βρεθεί μια μερική λύση της εξίσωσης αυτής, της μορφής $\boldsymbol{\beta}=(y,\,p(x,y,z),\,q(x,y,z))$ και κατόπιν να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{\varepsilon}\mathbf{a}\mathrm{d}\mathbf{s}$, όπου ε είναι μια λεία, θετικά προσανατολισμένη επιφάνεια που περιορίζεται απο την κλειστή καμπύλη $\mathbf{r}=(\cos t,\,\sin t,\,1)$, $0\le t\le 2\pi$. **(β: 1.2)**

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ