A

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ 2ο Εξάμ. κανονική εξέταση - περίοδος Ιουνίου 2006 (8-9-06)
Ανάλυση ΙΙ - Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ 1. α) Δίνεται η C^2-τάξης συνάρτηση $w = f(x, y)$, όπου $x = x(u, v) = u + v$, $y = y(u, v) = u - v$. Δείξτε ότι ισχύει:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}.$$

(β: 0.5)

β) Η θερμοκρασία στο σημείο (x, y, z) του χώρου (μονάδα μέτρησης είναι το χιλιόμετρο km)δίνεται από τη συνάρτηση

$$w = f(x, y, z) = \frac{1}{180}[7400 - 4x - 9y - 0.03xy] - 2z.$$

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας, ανά μονάδα μήκους, στο σημείο $P(200, 200, 5)$ ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v} = (3, 4, -12)$. Ως προς ποια κατεύθυνση επιτυγχάνεται ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής; Ανεμόπτερο κατέρχεται από το σημείο P με ταχύτητα 3 km/min ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v}$. Πώς μεταβάλλεται η θερμοκρασία στο ανεμόπτερο ανά λεπτό; (Σημειώστε ότι είναι $\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{ds}\frac{ds}{dt}$) **(β: 1.5)**

γ) Βρείτε την τιμή της παράστασης $\sqrt{2 \cdot (2.02)^3 + (2.97)^2}$ με γραμμική προσέγγιση χρησιμοποιώντας κατάλληλη συνάρτηση. **(β: 0.5)**

Θ 2. α) Να μελετήσετε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$. **(β: 1.25)**

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $xe^y + e^z = 0$ ορίζει, υπό πεπλεγμένη μορφή, συνάρτηση $z = f(x, y)$ σε μια περιοχή του σημείου $(-1, 1)$. Κατόπιν να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους 1ης και 2ης τάξης της f και να γράψετε το πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού της f στο σημείο $(-1, 1)$. **(β: 1.25)**

Θ 3. α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \iint_{\Omega} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, όπου $f(x, y) = x$ και $\Omega : 0 \leq y \leq x$, $x^2 + y^2 \leq 2$. Να επαληθευθεί το αποτέλεσμα μ΄ ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. **(β: 1.2)**

β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 x^{-2}\mathrm{d}x \int_{2x}^{3x} (x + y)\cos(x + y)\mathrm{d}y$, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x + y = v$, $y = uv$. **(β: 1.3)**

Θ 4. α) Αν $\mathbf{F} = (2xy + z^2, 2yz + x^2, 2xz + y^2)$ να δείξετε ότι το πεδίο $\mathbf{F}$ προέρχεται από βαθμωτό δυναμικό f. Να υπολογιστεί η συνάρτηση f καθώς και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_k \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{r}$, επί των παρακάτω διαδρομών k:

i) Επί του ευθυγράμου τμήματος ΑΒ με Α(1,-2,1) και Β(2,1,2).
ii) Επί της τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓ με Α(1,-2,1), Β(0,0,0), Γ(2,1,2) .
iii) Επί της τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓΔ με Α(1,-2,1), Β(1,0,0), Γ(2,0,2) και Δ(2,1,2). **(β: 1.2)**

β) Έστω $\mathbf{F} = \mathrm{rot}\mathbf{b}$, όπου $\mathbf{b} = (z, -xz, z)$. Να υπολογίσετε τη ροή της συνάρτησης $\mathbf{F}$ δια μέσου της επιφανείας ε_1: $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 1$ κατά τη φορά του z-άξονα. Να επαληθευθεί το αποτέλεσμα με ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.
Ποια είναι η ροή της $\mathbf{F}$ δια της επιφανείας ε_2: $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$ κατά φορά αντίθετη του z-άξονα;
(β: 1.3)

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ