



ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ 2ο Εξάμ. Επαναληπτική εξέταση - περίοδος Σεπτεμβρίου 2006 (12-10-06)
Ανάλυση II - Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Ονοματεπώνυμο

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ 1. α) Δίνεται η C^2 -τάξης συνάρτηση $w = f(x, y)$, όπου $x = x(u, v) = 2u + v$, $y = y(u, v) = u - v$. Δείξτε ότι ισχύει:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 5 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

(β: 0.5)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = xy - y$.

i) Να βρείτε την κατευθυνόμενη παράγωγο $D_{\mathbf{u}}f(P)$ στο σημείο $P(3, 1)$ ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{u} = (3, 4)$.

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει διάνυσμα $\mathbf{u}$ τέτοιο ώστε $D_{\mathbf{u}}f(P) = 0$ και σε θετική απάντηση να βρείτε ένα τέτοιο διάνυσμα.

iii) Υπάρχει σημείο P τέτοιο ώστε $D_{\mathbf{u}}f(P) = 0$ για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u}$; Αν ναι βρείτε το σημείο αυτό.

iv) Υπάρχει κατεύθυνση $\mathbf{u}$ τέτοια ώστε $D_{\mathbf{u}}f(P(3, 1)) = 7$; (β: 2.0)

Θ 2. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y + 5$ ορισμένη στο κλειστό τριγωνικό χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες $x = y$, $x = 0$, $x = 3$. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f και τα ολικά ακρότατά της. (β: 1.25)

β) Το υψόμετρο ενός λόφου περιγράφεται από την συνάρτηση $z = f(x, y) = \frac{1}{10}(x^2 - xy + 2y^2)$.

i) Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια του λόφου στο σημείο $P(2, 1, 0.4)$.

ii) Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του επιπέδου ή διαφορετικά βρείτε προσεγγιστικά το υψόμετρο του σημείου του λόφου, που βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από το σημείο $(2.2, 0.9)$ του επιπέδου xOy .

(β: 1.25)

Θ 3. α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} y dx$. Να σχεδιαστεί ο τόπος ολοκλήρωσης

Ω . Να επαληθευθεί το αποτέλεσμα:

i) Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης.

ii) Μ' ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} d\mathbf{r}$, όπου $\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y))$ με $Q_x = 2y$. (β: 2.5)

Θ 4. α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \iint_{\Omega} y(x+y)^{-2} \cos(x+y) dx dy$, όπου Ω ο τόπος που

περικλείεται από τις ευθείες $x+y=1$, $x+y=2$, $x=0$, $y=0$, θέτοντας $x+y=u$, $x=uv$. (β: 1.2)

β) Να δειχθεί ότι το πεδίο $\mathbf{a} = (-z, x, y)$ είναι σωληνοειδές και να βρεθεί ένα διανυσματικό δυναμικό της μορφής $\mathbf{b} = (p(x, y, z), q(x, y, z), -yz)$ με $p, q \neq 0$. Αν το επίπεδο $x+y+z=1$ τέμνει τους x, y, z -άξονες στα σημεία A, B, C να υπολογιστεί η ροή του $\mathbf{a}$ δια της επιφανείας ABC με ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. (β: 1.3)

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ