A

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ 2ο Εξάμ. κανονική εξέταση - περίοδος Ιουνίου 2007 (2-10-07)
Ανάλυση ΙΙ - Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ 1. i) Να βρεθούν οι ισοσταθμικές επιφάνειες της συνάρτησης $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

iii) Το δυναμικό ηλεκτρικού πεδίου, οφειλόμενο σε σημειακό φορτίο q, δίνεται από τη συνάρτηση $\Phi(x,y,z) = \frac{q}{r}$, όπου $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Δείξτε ότι ισχύει:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

iv) Το ύψος h ενός λόφου δίνεται από την συνάρτηση $h = f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2$. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο (π) στο σημείο (2, 1, 4) της επιφάνειας του λόφου. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του (π) ή διαφορετικά, βρείτε προσεγγιστικά το ύψος του σημείου του λόφου που βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από το σημείο (2.2, 0.9) του επιπέδου xOy. Ποιο είναι το σφάλμα της προσέγγισης;

v) Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y,z) = e^{xy+z}$ στο σημείο $P(1,-1,1)$ ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{u} = (1,1,-2)$. Ποια είναι η κατεύθυνση του ελάχιστου ρυθμού μεταβολής της f στο P;

Θ 2. α) i) Να μελετήσετε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$.

ii) Να γραφεί ο τύπος Taylor με όρους μέχρι 2ης τάξης της συνάρτησης $f(x,y) = y^x$ σε μια περιοχή του σημείου $(1,1)$.

β) Ρουκέτα εκτοξεύεται με σταθερή επιτάχυνση x μέτρα/sec^2. Θεωρώντας την αντίσταση του αέρα αμελητέα το ύψος σε μέτρα της θέσης της ρουκέτας, μετά από χρόνο t sec, δίνεται από τη συνάρτηση $f(x,t) = \frac{1}{2}(x-32.25)t^2$. Τα καύσιμα που καταναλώνονται σε t sec είναι ανάλογα του x^2t και υπόκεινται στον περιορισμό $x^2t = 11094$. Βρείτε την τιμή του x ώστε η ρουκέτα να φθάσει στο μέγιστο δυνατό ύψος καθώς και το ύψος αυτό.

Θ 3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$. Να επαληθευθεί το αποτέλεσμα:

i) αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης.

ii) χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό.

iii) μ΄ ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα επιλέγοντας την $\overrightarrow{F}(x,y) = [P,Q]$ έτσι ώστε $P \neq 0$ και $Q \neq 0$.

Θ 4. α) Έστω το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F} = (y^2\cos x + 1)\overrightarrow{i} + (2y\sin x + 3y^2 z)\overrightarrow{j} + y^3\overrightarrow{k}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση f C^2-τάξης τέτοια ώστε $\operatorname{grad} f = \overrightarrow{F}$. Να βρεθεί η f με δυό τρόπους και κατόπιν να υπολογιστεί το $\displaystyle\int_k \overrightarrow{F}\mathrm{d}\overrightarrow{r}$ επί των παρακάτω διαδρομών:

i) Επί του ευθυγράμου τμήματος ΑΒ με Α(0,0,0) και Β(π/2,1,1).

ii) Επί της τεθλασμένης γραμμής ΑΓΒ με Γ(π/2,0,1) .

iii) Επί της τεθλασμένης γραμμής ΑΔΓΒ με Δ(π/2,0,0).

iv) Επί της καμπύλης $x^2 + y^2 = a^2, z = b$.

β) Αν $\overrightarrow{a} = \operatorname{rot}\overrightarrow{b}$, όπου $\overrightarrow{b} = (y, yx, z)$, να υπολογιστεί η ροή του πεδίου $\overrightarrow{a}$ δια της επιφανείας του παραβολοειδούς ε_1: $z = 9 - x^2 - y^2$, για $z \geq 0$, κατά τη θετική φορά του z-άξονα και να επαληθευθεί το αποτέλεσμα με ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.
Ποια είναι η ροή δια της επιφανείας ε_2: $x^2 + y^2 \leq 9$, με $z = 0$ κατά τη φορά του z-άξονα;

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ