

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ 2ο Εξάμηνο κανονική εξέταση - Ιούλιος 2008 (7-7-08)
Ανάλυση II - Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Ονοματεπώνυμο

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ 1. α) i. Να δείξετε ότι η εξίσωση $F(x, y, z) = xe^y + e^z - z^2 = 0$, ορίζει, σε πεπλεγμένη μορφή, συνάρτηση $f(x, y)$ σε μια περιοχή του σημείου $(-e^{-1}, 1)$.

ii. Να βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(-e^{-1}, 1, 0)$.

iii. Να γράψετε τον τύπο Taylor με όρους μέχρι 2ης τάξης της συνάρτησης $f(x, y)$ σε μια περιοχή του σημείου $(-e^{-1}, 1)$.

β) Δίνεται η διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία, στο σημείο P , ισχύουν:

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = 3, \text{ όπου } \mathbf{u} = (1, 0) \text{ και } D_{\mathbf{v}}f(P) = 2, \text{ όπου } \mathbf{v} = (0, 1).$$

Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος $D_{\mathbf{w}}f(P)$, ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{w} = (1, 1)$.

Θ 2. α) Έστω η συνάρτηση $z = f(x, y)$, η οποία είναι C^2 τάξης στο $\mathbb{R}^2$, και $x = u + v$, $y = u - v$. Ναδειχθεί ότι ισχύει:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

β) Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x, y) = xy$ με πεδίο ορισμού τον δίσκο $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Θ 3. α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_{\Omega} 2xy dx dy$, όπου το σύνορο $\partial\Omega$ αποτελείται από το τόξο

$\widehat{AB}$ του κύκλου $x^2 + y^2 = 2$, με άκρα τα σημεία $A(\sqrt{2}, 0)$, $B(1, 1)$, από το τόξο $\widehat{BC}$ της παραβολής $2y^2 = 1 + x$, όπου $C(-1, 0)$ και το ευθύγραμμο τμήμα CA .

Να επαληθευθεί το αποτέλεσμα με δύο τρόπους:

i) με αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης. **ii)** μ' ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

β) Έστω το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (1 + 2xy^2 + e^y)\mathbf{i} + (2x^2y + xe^y)\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}$.

Ναδειχθεί ότι υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση f C^2 -τάξης τέτοια ώστε $\vec{F} = \text{grad } f$ και κατόπιν να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{AB} \vec{F} d\vec{r}$ επί οποιασδήποτε τμηματικά λείας διαδρομής AB με άκρα τα

σημεία $A(0, 0, 0)$ και $B(1, 1, 1)$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\oint_k \vec{F} d\vec{r}$, όπου k είναι η καμπύλη $x^2 + y^2 = a^2$ και $z = b$.

Θ 4. α) Να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{F} = \text{rot } \vec{b}$, όπου $\vec{b} = (xy, 2yz, 3zx)$.

Το επίπεδο $x + y + z = 1$ τέμνει τους άξονες x, y, z στα σημεία A, B, C αντίστοιχα. Να βρεθεί η ροή της $\vec{F}$ δια της εξωτερικής όψεως της επιφάνειας ABC με δύο τρόπους:

i) με απ' αυθείας υπολογισμό.

ii) με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

Ποια είναι η συνολική ροή δια των εξωτερικών όψεων των τριών άλλων επιφανειών του τετραέδρου $OABC$;

β) Έστω τα πεδία $\vec{F} = \nabla \ln \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ και $\vec{G} = \nabla \arctan \frac{y}{x-1}$.

i) Ναδειχθεί ότι είναι συντηρητικά. **ii)** Να βρεθούν τα ιδιόμορφα (ή ανώμαλα) σημεία.

iii) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: $\oint_k \vec{F} d\vec{r}$, $\oint_k \vec{G} d\vec{r}$, όπου $k : x^2 + y^2 = 1/4$.

iv) Να υπολογιστεί η κυκλική σταθερά γύρω από το ανώμαλο σημείο. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ