



ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ 2ο Εξάμ. Επαναληπτική εξέταση - περίοδος Οκτωβρίου 2008 (29-10-08)
Ανάλυση II - Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Ονοματεπώνυμο

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ 1. α) Αν είναι $z = \sin x + f(\sin y - \sin x)$, όπου f διαφορίσιμη συνάρτηση, να δεχτεί ότι:

$$(\cos y) \frac{\partial z}{\partial x} + (\cos x) \frac{\partial z}{\partial y} = (\cos x)(\cos y).$$

β) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση με $f(1, 2) = 5$. Οι τιμές της f , που υπολογίζονται από τον τύπο της γραμμικής προσέγγισης πρώτης τάξης, στα σημεία $(1.1, 2)$ και $(1, 1.9)$ είναι αντίστοιχα $f(1.1, 2) \approx 5.2$ και $f(1, 1.9) \approx 4.6$. Να βρείτε τις μερικές παραγώγους $f_x(1, 2)$, $f_y(1, 2)$ και κατόπιν το εφαπτόμενο επίπεδο της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $P(1, 2, 5)$.

Θ 2. α) i) Να δειχτεί ότι η εξίσωση $e^{xy} + e^{xz} + e^{yz} = e + 2$ ορίζει πεπλεγμένα, σε μια περιοχή του σημείου $A(1, 0)$, μια συνάρτηση $z = f(x, y)$.

ii) Να βρείτε την παράγωγο δεύτερης τάξης f'' της f , στο σημείο A .

ii) Να βρείτε την κατευθυνόμενη παράγωγο της f στο σημείο A , ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{u} = (2, 1)$. Ως προς ποια κατεύθυνση έχουμε στο A , τον ελάχιστο ρυθμό μεταβολής της f ;

β) Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση

$$f(x, y) = x^3 - 6xy + y^3.$$

Θ 3. α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} (2-2y) dy dx$. Να επαληθευθεί το αποτέλεσμα με δυο τρόπους:

i) Με αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης. ii) Με ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιώντας μια διανυσματική συνάρτηση της μορφής $\vec{F}(x, y) = [P(y), Q(x)]$, ($P, Q \neq 0$).

β) Με τη βοήθεια ενός διπλού ολοκληρώματος να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_{\partial\Omega^+} (-x^2 y) dx + xy^2 dy,$$

όπου $\partial\Omega$ το σύνορο του χωρίου Ω , που αποτελείται από τις γραμμές $y = 0$, $x = y$, $y = \sqrt{1-x^2}$, ($x > 0$).

Θ 4. α) Έστω η διανυσματική συνάρτηση $\vec{F} = (x^2 z + \frac{y^3}{3}, xy^2 + \frac{z^3}{3}, yz^2 + \frac{x^3}{3})$. Να εξεταστεί αν υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση f C^2 -τάξης τέτοια ώστε $\text{grad } f = \vec{F}$. Να βρεθεί η f , αν υπάρχει, με δυο τρόπους και κατόπιν να υπολογιστεί το $\int_{AB} \vec{F} d\vec{r}$, επί μιας τυχούσας τμηματικά λείας διαδρομής AB , με $A(0, 0, 0)$ και $B(1, 1, 1)$. Να επαληθευθεί το αποτέλεσμα για το ευθύγραμμο τμήμα AB .

β) Δίνεται ότι: «Αν το $\vec{F}$ είναι σωληνοειδές και η συνάρτηση $\vec{F}$ ομογενής βαθμού ν ($\nu \neq -2$), δηλαδή είναι $\vec{F}(tx, ty, tz) = t^\nu \vec{F}(x, y, z)$, τότε το διάνυσμα $\vec{\beta} = \frac{\vec{F} \times \vec{r}}{\nu + 2}$ είναι λύση της εξίσωσης $\vec{F} = \text{rot } \vec{\beta}$ ».

Αν $\vec{F} = [-x, x, z]$, να βρεθεί το $\vec{\beta}$. Να υπολογιστεί η ροή της $\vec{F}$ δια της επιφανείας $\varepsilon: z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$ κατά τη φορά του z -άξονα με δυο τρόπους:

i) Με ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα. ii) Με ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. Τα θέματα παραδίδονται μαζί με το γραπτό.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ