

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ 2ο Εξάμηνο κανονική εξέταση - Ιούλιος 2009 (13-7-09)
Ανάλυση II - Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Ονοματεπώνυμο

Αριθμός Μητρώου

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ 1. i. Δίνονται οι C^1 τάξης συναρτήσεις g, F τέτοιες ώστε $g(x, y, z) = F(u, v)$ με $u = x + y - z$, $v = x^2 + y^2$. Αν είναι $g_z \neq 0$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x, y, z) = 0$ ορίζει μια συνάρτηση $z = f(x, y)$ υπό πεπελεγμένη μορφή, για την οποία ισχύει: $xf_y - yf_x = x - y$.

ii. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (x^2 - 3x + 1, y, 2z - 2xz)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν διανυσματικά πεδία $\mathbf{G}$ τέτοια ώστε $\mathbf{F} = \text{rot} \mathbf{G}$, και υπολογίστε ένα από αυτά. Κατόπιν να υπολογιστεί με τη χρήση επικαμπυλίου ολοκληρώματος, η ροή του $\mathbf{F}$ για την επιφάνεια $S : z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$ (θετική όψη η άνω).

Θ 2. α) Ένας κυκλικός δίσκος βρίσκεται στο επίπεδο xOy και το κέντρο του συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Η ακτίνα του είναι 2 και η συνάρτηση ειδικής πυκνότητας στο σημείο $(x, y, 0)$ του δίσκου, δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y) = 2^{x^2+y^2}.$$

Βρείτε τη μάζα του. (Η τρίτη διάσταση του δίσκου θεωρείται αμελητέα.)

β) Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3$.

Θ 3. Έστω το C^1 -τάξης διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και η C^1 -τάξης βαθμωτή συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

i) Να δειχτεί ότι $\text{div}(\varphi \mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \nabla \varphi + \varphi \text{div}(\mathbf{F})$.

ii) Αν $\mathbf{F} = \nabla \varphi$ και το $\mathbf{F}$ είναι σωληνοειδές, να δειχτεί ότι

$$\iint_S \varphi \mathbf{F} ds = \iiint_G (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}) dx dy dz,$$

όπου $\mathbf{S}$ μια κατά τμήματα λεία κλειστή επιφάνεια με θετική όψη την εξωτερική και G το χωρίο που έχει σύνορο την επιφάνεια $\mathbf{S}$.

iii) Αν $\mathbf{F} = (2x, y, -3z)$ δείξτε ότι υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση φ , C^2 -τάξης, τέτοια ώστε $\mathbf{F} = \nabla \varphi$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_S \varphi \mathbf{F} ds$, στην εξωτερική επιφάνεια του κύβου $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

Θ 4. α) Να υπολογιστεί, με τη βοήθεια επικαμπυλίου ολοκληρώματος, το εμβαδόν του χωρίου D μεταξύ των ελλείψεων $C_1 : 25x^2 + 16y^2 = 400$ και $C_2 : 4x^2 + 9y^2 = 36$.

β) Για την επιφάνεια $x + y^2 + z^3 = \sin(xyz)$, να υπολογιστούν το κάθετο διάνυσμα και το εφαπτόμενο επίπεδό της στο σημείο $(-1, 1, 0)$.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ