

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ 2ο Εξάμηνο επαναληπτική εξέταση - Σεπτέμβριος 2009 (28-9-09)
Ανάλυση II - Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Ονοματεπώνυμο

Αριθμός Μητρώου

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ 1. α). Να αναπτύξετε κατά Taylor, με δυνάμεις έως και τρίτου βαθμού, τη συνάρτηση $f(x, y) = e^x \sin y$ σε μια περιοχή του σημείου $(\xi, 0)$, όπου ξ ένας πραγματικός αριθμός.

β) Να αποδείξετε ότι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (4xy + yz, 2x^2 + xz + 3z^2, xy + 6yz)$ προέρχεται από δυναμικό και να βρείτε μια συνάρτηση $\varphi(x, y, z)$ με $\nabla\varphi = \mathbf{F}$. Κατόπιν να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 2ου είδους του πεδίου $\mathbf{F}$ επί της τεθλασμένης γραμμής $(ABGDE)$, όπου $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$, $G = (1, 0, 0)$, $D = (0, 1, 0)$ και $E = (1, 1, 0)$.

Θ 2. α) Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\alpha \int_0^{(\alpha^2 - x^2)^{1/2}} (\alpha^2 - y^2)^{1/2} dy dx.$$

(Το σχήμα είναι υποχρεωτικό).

β) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} x &= 2r \sin \phi \cos \theta, \\ y &= 3r \sin \phi \sin \theta, \\ z &= 5r \cos \phi, \end{aligned}$$

$r \geq 0$, $\phi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, υπολογίστε τον όγκο του ελλειψοειδούς:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} \leq 1\}.$$

Θ 3. α) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z)$, $(x, y, z) \neq (0, 0, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Ναδειχθεί ότι $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

ii) Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\mathbf{F}$ κατά μήκος του κύκλου

$$C : \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0).$$

iii) Να εξετάσετε αν ισχύει το θεώρημα του Stokes, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να επαληθεύσετε το θεώρημα του Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (x, y, -z)$ στο χωρίο $G = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Θ 4. α) Δίνονται οι C^2 -τάξης συναρτήσεις f, g και η συνάρτηση $z = xf(x+y) + g(x+y)$. Να δείξετε ότι είναι $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} = 0$.

β) Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x, y) = x + z$ υπό τη δέσμευση $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ