$\boxed{\text{A}}$

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ 2ο Εξάμ. κανονική εξέταση - Ιούνιος 2003
Ανάλυση ΙΙ - Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

1. α) i) Να ελεγχθεί, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, η συνέχεια της συνάρτησης

$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\frac{x}{y}, & y \neq 0 \\ \alpha, & y = 0 \end{cases}$. **(β: 0.7)**

ii) Έστω η διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2$ συνάρτηση $f(x,y)$, για την οποία γνωρίζουμε ότι $\nabla f(P) = (-2, 4, -4)$, όπου P σημείο του $\mathbb{R}^2$. Μετακινούμαστε σε μικρή απόσταση $a > 0$ από το P στο σημείο P_1, έτσι ώστε η γωνία του $\overrightarrow{PP_1}$ με το $\nabla f(P)$ να είναι $\pi/3$. Να δείξετε, με κατάλληλη χρήση του τύπου της γραμμικής προσέγγισης, ότι $f(P_1) - f(P) \simeq 3a$. **(β: 0.8)**

β) Έστω η συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2 + 8x + y^2 - 4y + z^2$.

i) Να βρείτε, αν υπάρχει, σημείο P_0 ώστε η παράγωγος κατά κατεύθυνση $D_{\mathbf{u}}f(P_0)$ να είναι μηδέν για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u}$.

ii) Να βρείτε την παράγωγο κατά κατεύθυνση της f στο σημείο $(-1,1,1)$, ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\nabla f(-1,1,1)$.

iii) Υπάρχουν διανύσματα $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ τέτοια ώστε η παράγωγος κατά κατεύθυνση $D_{\mathbf{u}}f(-1,1,1)$ να είναι μηδέν; Αν ναι, πόσα τέτοια διανύσματα, μη παράλληλα μεταξύ τους, υπάρχουν; Στην περίπτωση αυτή, αν είναι περισσότερα από ένα, βρείτε δύο από αυτά. Αν όχι, εξηγείστε. **(β: 1.0)**

2. α) i) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $F(x,y,z) = z - y - xe^z = 0$, ορίζει υπό πεπλεγμένη μορφή μία συνάρτηση $z = f(x,y)$ σε μία περιοχή του σημείου $(0,0)$. Κατόπιν να προσδιοριστεί ο τύπος Taylor τάξης 2 στο σημείο $(0,0)$. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα. **(β: 0.5)**

ii) Αν $g(x,y) = F(x^2+y^2,\, x+y-z(x,y))$, όπου οι συναρτήσεις F, z είναι C^1-τάξης και η F έχει μη μηδενικές μερικές παραγώγους, να δείξετε ότι είναι $yg_x - xg_y = 0 \Leftrightarrow xz_y - yz_x = x - y$. **(β: 0.8)**

β) Το επίπεδο $9x + 4y + z = 0$ τέμνει το ελλειπτικό παραβολοειδές $z = 3x^2 + 2y^2$ κατά μία έλλειψη. Βρείτε το υψηλότερο και χαμηλότερο (σε σχέση με το επίπεδο xOy) σημείο της έλλειψης. **(β: 1.2)**

3. α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint\limits_D e^{(x+y)^2} dxdy$, όπου D ο τόπος που δίνεται από τις ανισώσεις: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$, αν $x = u(1-v)$, $y = uv$. **(β: 0.7)**

β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-2}^{0} dx \int_{2+x}^{\sqrt{4-x^2}} 2xy dy$ και να επαληθευθεί το αποτέλεσμα μ΄ ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. **(β: 0.8)**

γ) Να εξετάσετε αν τα παρακάτω πεδία είναι συντηρητικά:

$\boldsymbol{\alpha} = (2xy + z^3)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$, $\quad \boldsymbol{\beta} = \nabla \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $\quad \boldsymbol{\gamma} = \nabla(\arctan\frac{y}{x})$.

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int_{\widehat{AB}} \boldsymbol{\alpha} d\mathbf{r}$, όπου $\widehat{AB}$ τμηματικά λεία καμπύλη με $A(0,0,0)$ και $B(1,2,3)$.

ii) $\int_{\widehat{AB}} \boldsymbol{\beta} d\mathbf{r}$, $\int_{\widehat{AB}} \boldsymbol{\gamma} d\mathbf{r}$, όπου $\widehat{AB}$ το τόξο του κύκλου $x^2 + y^2 = R^2$ με $A(R,0)$ και $B(0,R)$.

iii) $\oint_k \boldsymbol{\beta} d\mathbf{r}$, $\oint_k \boldsymbol{\gamma} d\mathbf{r}$, όπου k: $(x-1)^2 + y^2 = 1/4$.

iv) $\oint_k \boldsymbol{\beta} d\mathbf{r}$, $\oint_k \boldsymbol{\gamma} d\mathbf{r}$, όπου k: $|x| + |y| = a$, $a > 0$.

Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογείτε το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης. **(β: 1.5)**

4. Έστω το πεδίο $\mathbf{G} = \nabla \times \boldsymbol{\alpha}$, όπου $\boldsymbol{\alpha} = (x-y)z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$ και $\partial\Omega$ η επιφάνεια του στερεού: $\Omega: \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{8 - x^2 - y^2}$.

i) Να υπολογιστεί η ροή δια της επιφανείας $\varepsilon_1 \subset \partial\Omega$, όπου $\varepsilon_1: \ z = \sqrt{x^2+y^2}$ με φορά αντίθετη προς τον z-άξονα. **(β: 1.0)**

ii) Να υπολογιστεί η ροή δια της επιφανείας $\varepsilon_2 \subset \partial\Omega$, όπου $\varepsilon_2: \ z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$ και να επαληθευθεί το αποτέλεσμα μ΄ ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. **(β: 1.0)**

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ