ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ 2ο Εξάμ. επαναληπτική εξέταση - Σεπτέμβριος 2003

Ανάλυση ΙΙ - Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

1. α) i) Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2$ με $\mathbf{F}(x,y)=\left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2},\ xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$. Να ορίσετε κατάλληλα τη συνάρτηση $\mathbf{F}$ στο σημείο $(0,0)$, ώστε να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$. **(β: 0.8)**

β) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $z=\ln(e^x+e^y)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις:

i) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$ **ii)** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$. **(β: 1)**

γ) Να βρείτε προσεγγιστικά (με γραμμική προσέγγιση) την τιμή της συνάρτησης z (του (β) ερωτήματος) στο σημείο $(1.1,\ 0.8)$. **(β: 0.7)**

2. α) Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση

$$f(x,y)=xe^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^3}{3}+y}.$$

(β: 1.5)

β) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g(x)$, η συνάρτηση $f(x,y)=g(x^2+y^2)$ και το σημείο $P(a,b)$. Δείξτε ότι το διάνυσμα $\nabla f(a,b)$ είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$. Αν $g'(a^2+b^2)=\dfrac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}}$, να βρείτε την κατευθυνόμενη παράγωγο της f στο P ως προς την κατεύθυνση του $\mathbf{u}$ και να τη συγκρίνετε με τον μέγιστο ρυθμό μεταβολής, ανά μονάδα μήκους, της f στο P. **(β: 0.6)**

γ) Για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x,y)=(P(x,y),\ Q(x,y))$ γνωρίζουμε ότι η καμπύλη $\mathbf{r}(t)=(t+5)\mathbf{i}+(t^2+10t+3)\mathbf{j}$ είναι η διανυσματική γραμμή του $\mathbf{F}$ που διέρχεται (για $t=0$) από το σημείο $M(5,3)$. Να βρείτε τις συνιστώσες του $\mathbf{F}$ στο σημείο M. **(β: 0.4)**

3. α) Έστω το χωρίο Ω με σύνορο $\partial\Omega: y=2x,\ y=2x-2,\ y=x$ και $y=x+1$. Να εξηγήσετε τη μορφή του σχήματος $\partial\Omega$, να βρείτε τις κορυφές του και να το σχεδιάσετε. **(β: 0.5)**

β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy$, αν $x=u-v,\ y=2u-v$. **(β: 1)**

γ) Να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα μ' ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. **(β: 1)**

4. α) Αν $\mathbf{a}=(2xyz,\ x^2z,\ x^2y)$ να δείξετε ότι $\oint_k \mathbf{a}d\mathbf{r}=0$ επί οποιασδήποτε κλειστής καμπύλης k. Να υπολογίσετε το παραγόμενο έργο κατά την μετακίνηση του $\mathbf{a}$ επί της τεθλασμένης διαδρομής ABG: $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$, $G(1,1,1)$, εφαρμόζοντας δύο διαφορετικές διαδικασίες υπολογισμού. **(β: 1.2)**

β) Αν $\mathbf{a}=\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}$, όπου $\boldsymbol{\beta}=(2y^2,\ x,\ -z^3)$, να υπολογίσετε τη ροή δια της επιφανείας $x^2+y^2\le 1,\ z=1$ κατά τη φορά του z-άξονα. Να εφαρμόσετε δύο διαφορετικές διαδικασίες υπολογισμού. **(β: 1.3)**

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ