A

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ 2ο Εξάμ. επαναληπτική εξέταση - Σεπτέμβριος 2004
Ανάλυση ΙΙ - Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

1. α) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $w = z(x, y)$, που ορίζεται υπό πεπλεγμένη μορφή από την εξίσωση $F(x, y, z) = \varphi(z) - xf(y) = 0$, όπου φ, f δυο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $\varphi'(z) \neq 0$, ικανοποιεί τη εξίσωση $z_x z_y = x(z_x z_{xy} - z_y z_{xx})$.

β) Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 y - 4y^3$. Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $P(2, 1)$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
i) Ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

ii) Ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{PA}$, όπου $A(4, 0)$. Αποτελεί η τιμή που βρήκατε τον μέγιστο ρυθμό μεταβολής της f στο σημείο $P(2, 1)$;

2. α) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ υπό τις δεσμεύσεις $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

β) Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = y^x$, $y > 0$, $x \in \mathbb{R}$.
i) Να γραφεί ο τύπος Taylor 2ης τάξης σε μια περιοχή του σημείου (1,1).
ii) Αν κάθε μια από τις μεταβλητές x, y αυξηθεί κατά 1% να δειχθεί ότι η μεταβολή της f είναι κατά προσέγγιση ίση με $\dfrac{f(x, y)}{100}(1 + \ln y)x$.

3. α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \iint\limits_{\Omega} x dx dy$, όπου Ω είναι το χωρίο που περικλείεται από τις γραμμές $y = 0$, $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $(x > 0)$ και να επαληθευθεί το αποτέλεσμα μ' ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα επιλέγοντας την $\overrightarrow{F}(x, y) = (P, Q)$ έτσι ώστε $(P, Q \neq 0)$.
β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \iint\limits_{\Omega} \cos \dfrac{y - x}{x + y} dx dy$, όπου Ω είναι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α(1,0), Β(2,0), $\Gamma(0, 2)$, $\Delta(0, 1)$.

4. α) Έστω το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x, y, z)$ της κλάσεως C^1 σε ένα απλώς συνεκτικό τόπο $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Πότε λέμε ότι το πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο; Να διατυπωθούν ισοδύναμες εκφράσεις.
Έστω $\overrightarrow{F} = \mathbf{grad}(\ln \sqrt{(x - 1)^2 + y^2})$. Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\oint_{\Gamma_\nu} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r}$, όπου Γ_ν, $\nu = 1, 2$ είναι αντίστοιχα οι κύκλοι: $\Gamma_1 : x^2 + y^2 = a^2$, $(a < 1)$, $\Gamma_2 : x^2 + y^2 = a^2$, $(a > 1)$. Αν

$$\overrightarrow{G} = \left(-\frac{y}{(x - 1)^2 + y^2} - 5y \right) \overrightarrow{i} + \left(\frac{x - 1}{(x - 1)^2 + y^2} - 5x \right) \overrightarrow{j},$$

να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα $\oint_{\Gamma_\nu} \overrightarrow{G} d\overrightarrow{r}$, $\nu = 1, 2$ επί των παραπάνω κύκλων. Να σχολιάσετε τα τέσσερα αποτελέσματα σε σχέση με τους παραπάνω ισοδύναμους ορισμούς.
β) Έστω το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x, y, z)$ της κλάσεως C^1 σε ένα απλώς συνεκτικό τόπο $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Πότε λέμε ότι το πεδίο $\overrightarrow{F}$ είναι σωληνοειδές; Να διατυπωθούν ισοδύναμες εκφράσεις.
Να υπολογιστεί η ροή του $\overrightarrow{F} = (x^2 - 3x + 1, y, 2z - 2xz)$ δια της επιφανείας $\varepsilon : z = 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$, κατά τη φορά του z-άξονα, με ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ