ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ 2ο Εξάμ. κανονική εξέταση - Ιούνιος 2004
Ανάλυση ΙΙ - Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

1. **α)** Έστω η διαφορίσιμη συνάρτηση $z = f(x, y)$, για την οποία γνωρίζουμε ότι οι καμπύλες $(c_1) : \mathbf{r_1}(t) = (t+4,\, 5-t,\, -t^2+t+17)$ και $(c_2) : \mathbf{r_2}(u) = (u^2+1,\, 2u,\, 2u^3+2u-3)$ ανήκουν στην επιφάνεια S που αποτελεί τη γραφική παράσταση της f.
i) Να βρείτε το σημείο τομής P των δύο καμπύλων και κατόπιν να υπολογίσετε την τιμή $f(5, 4)$. **(β: 0.4)**
ii) Αρκούν τα στοιχεία που έχετε ώστε να προσδιορίσετε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου (π) της S στο σημείο P; Αν ναί βρείτε την εξίσωση του (π). Αν όχι εξηγείστε το γιατί. **(β: 0.6)**
iii) Να υπολογίσετε, αν γίνεται, με γραμμική προσέγγιση την τιμή $f(5.1,\, 3.9)$. **(β: 0.5)**
β) Αν $z = xf(x+y) + g(x+y)$, όπου f, g σναρτήσεις C^2-τάξης, να δείξετε ότι:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

(β: 1.0)

2. **α)** **i)** Να δειχθεί ότι η εξίσωση $F(x, y, z) = e^{xy} - e^{xz} + e^{yz} - e = 0$, ορίζει υπό πεπλεγμένη μορφή μία συνάρτηση $z = f(x, y)$ σε μία περιοχή του σημείου $(0, 1)$. Κατόπιν να προσδιοριστεί ο τύπος Taylor τάξης 2 της f στο σημείο $(0, 1)$. **(β: 1.2)**
β) Να εξετάσετε τα ακρότατα της $f(x, y) = x^3 + y^2$ υπό την δέσμευση $x^2 + y^2 = 1$. **(β: 1.3)**

3. **α)** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} 2(x-y)dy.$$

Να σχεδιαστεί το χωρίο ολοκλήρωσης και κατόπιν να υπολογίσετε το παραπάνω ολοκλήρωμα αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης. Να επαληθευθεί το αποτέλεσμα μ΄ ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. **(β: 1.7)**
β) Αν $\boldsymbol{\alpha}(x, y) = \mathrm{grad} \ln \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ και $\boldsymbol{\beta}(x, y) = \mathrm{grad}(\arctan \frac{y}{x-1})$ να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα $\oint_k \boldsymbol{\alpha} d\mathbf{r}$ και $\oint_k \boldsymbol{\beta} d\mathbf{r}$, όπου k μια τμηματικά λεία κλειστή διαδρομή τέτοια ώστε το σημείο (1,0) να ανήκει στο εσωτερικό της. **(β: 0.8)**

4. Να δειχθεί ότι το πεδίο $\boldsymbol{\alpha} = (-y, q, 1)$ προέρχεται από διανυσματικό δυναμικό.
i) Να βρεθεί μια λύση της εξίσωσης $\boldsymbol{\alpha} = \mathrm{rot}\boldsymbol{\beta}$ της μορφής $\boldsymbol{\beta}_1 = (A, B, 0)$. Αν $\boldsymbol{\beta}_2 = (3x^2 + xz,\, 3yz + x,\, y^2)$ είναι μια δεύτερη λύση της, να δειχθεί ότι υπάρχει μια βαθμωτή συνάρτηση $f(x, y, z)$ τέτοια ώστε $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_1 + \mathrm{grad}f$ και κατόπιν να υπολογιστεί η συνάρτηση f. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $int_k(\boldsymbol{\beta}_2 - \boldsymbol{\beta}_1)d\mathbf{r}$ επί της τεθλασμένης γραμμής k: $(0, 0, 0) = (x_0, y_0, 0) - (2, 1, 1)$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. **(β: 0.8)**
ii) Να υπολογιστεί η ροή του $\boldsymbol{\alpha}$ δια της εξωτερικής επιφανείας του παραβολοειδούς $z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0$. **(β: 0.9)**
iii) Να επαληθευθεί το αποτέλεσμα με ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. **(β: 0.8)**

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ