

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ - ΣΗΜΜΥ 2008-09

Συναρτήσεις Πολλών μεταβλητών - Ισοσταθμικές - Όρια - Συνέχεια

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$a) f_1(x, y) = \ln(y^2 - 4x + 8), \quad b) f_2(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)} \quad c) f_3(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 2x}{x^2 + y^2 - 2x}}$$

2. Να σχεδιάσετε τα χωρία του επιπέδου Oxy για τα οποία η συνάρτηση $f(x, y) = y(x-1)(y-x)$ είναι μη αρνητική. Στη συνέχεια να γράψετε τις ισοσταθμικές γραμμές $f(x, y) = c$ στη μορφή $y = g(x, c)$ και να δείξετε ότι για $c = 1/27$ δεν υπάρχει τμήμα της ισοσταθμικής γραμμής στη λωρίδα

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{3} < x < 1\}$$

εκτός από το μεμονωμένο σημείο $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

3. Να βρεθούν οι τιμές της συνάρτησης $f(x, y) = 1 + x + y$ στα σημεία της παραβολής με εξίσωση $y = x^2$. Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $g(x) = f(x, x^2)$.

4. Να βρεθούν, αντίστοιχα, οι ισοσταθμικές καμπύλες και οι ισοσταθμικές επιφάνειες των συναρτήσεων:

$$f_1(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad b) f_2(x, y) = \sin^{-1} xy, \quad c) f_3(x, y, z) = 2^{3x+5y-2z}$$
$$d) f_4(x, y, z) = \ln \left[\frac{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right]$$

5. Δίνεται η καμπύλη $(c) : x^2 + y^2 = 4, x + y + z = 1$. Να βρείτε μια διανυσματική συνάρτηση μιας μεταβλητής $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ που να περιγράφει την καμπύλη (c) . Κατόπιν να βρείτε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της (c) στο σημείο $P(-2, 0, 3)$ (Υπόδειξη. Βρείτε πρώτα μια παραμετρική παράσταση της προβολής της (c) στο $xOy...$).

6. Στο σύστημα των πολικών συντεταγμένων (r, θ) δίνεται η συνάρτηση

$$f(P) = \begin{cases} \sin 2\theta & \text{αν } P \neq O \\ 0 & \text{αν } P = O \end{cases}$$

όπου O η αρχή (το σημείο αναφοράς) του συστήματος. Βρείτε τις ισοσταθμικές καμπύλες $f(r, \theta) = c$ της f για $c = \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -1$ αντίστοιχα και συμπεράνατε ότι δεν υπάρχει το όριο της $f(P)$ όταν $P \rightarrow O$.

7. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια, όταν $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, των παρακάτω συναρτήσεων και να τα υπολογίσετε για τις συναρτήσεις που αυτά υπάρχουν.

$$f_1(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad f_2(x, y) = x^y, \quad x > 0$$
$$f_3(x, y) = \frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad f_4(x, y) = \left(\frac{(1+x^2)\sin y}{y}, \frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$
$$f_5(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2} & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad f_6(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4} & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

8. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f_5, f_6 της προηγούμενης άσκησης.

9. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} \quad \text{με} \quad x^2 y^2 + (x - y)^2 \neq 0.$$

Να εξετάσετε, αν υπάρχει το όριο: $\lim f(x, y)$, όταν $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Να εξετάσετε, αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$, τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right], \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right].$$

Τι συμπεραίνετε;

Παράδοση μέχρι 29-4-2009