ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4 - Γρ. Άλγεβρα

Επαναληπτικό. ΗΜΜΥ 2009-10

1. (α) Να αποδειχθούν οι ιδιότητες:

$$\text{(i) } (AB)^\top = B^\top A^\top, \qquad \text{(ii) } (AB)^\star = B^\star A^\star \tag{1}$$

(β) Να αποδειχθεί ότι αν οι πίνακες B και Γ είναι συμμετρικοί τότε για οποιονδήποτε πίνακα A, οι πίνακες $A^\top BA$ και $A\Gamma A^\top$ είναι συμμετρικοί.
(γ) Να δειχθεί ότι για κάθε τετραγωνικό πίνακα A ισχύει $(A^\nu)^\top = (A^\top)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$.
(δ) Να αποδειχθεί ότι αν ο πίνακας A είναι αντισυμμετρικός τότε ο πίνακας A^ν είναι συμμετρικός αν ο ν είναι άρτιος και αντισυμμετρικός αν ο ν είναι περιττός.

2. Να υπολογισθούν οι πίνακες AB και BA, όταν

$$A = \begin{bmatrix} 2+i & 4+3i & i \\ 7 & 6+9i & 1-i \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 8-4i & 5i \\ 6 & -2i \\ 3+2i & 4+5i \end{bmatrix}.$$

3. Να υπολογιστούν με χρήση ιδιοτήτων οι ορίζουσες

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & -\beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & -\delta \end{vmatrix} \quad \text{και} \quad D_2 = \begin{vmatrix} \lambda+\alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \lambda+\beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \lambda+\gamma \end{vmatrix}.$$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις (με μεταβλητή x)

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 & x \\ \lambda^2 & x & \lambda \\ x & \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0.$$

5. Να υπολογισθούν ο αντίστροφοι των πινάκων:

$$B = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\varphi & -\eta\mu\varphi & 0 \\ \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

6. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{(i)} \quad \begin{aligned} x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 7x_4 &= 2 \\ x_1 - 4x_3 + 10x_4 &= 3 \end{aligned} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{aligned} kx_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 &= 1 \qquad k \in \mathbb{R} \\ x_1 + x_2 + kx_3 &= 1, \end{aligned}$$

7. Να προσδιοριστούν όλες οι τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ για τις οποίες το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= \alpha \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= \beta \\ 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 5x_4 &= \gamma \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= \delta \end{aligned}$$

είναι συμβιβαστό.

Σ. Καρανάσιος