ΦΥΛΛΑΔΙΟ 05

Γραμμική Άλγεβρα
ΣΗΜΜΥ 2009-10

1. Η ισότητα $x * y = x + y + x^2y^2$ ορίζει μία πράξη $*$ στο $\mathbb{R}$. Να βρείτε το ουδέτερο στοιχείο της πράξης $*$ και να δείξετε ότι κάθε στοιχείο $x \in \mathbb{R}^*$ με $x < \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ έχει δύο συμμετρικά στοιχεία, ενώ κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x > \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ δεν έχει συμμετρικό στοιχείο, ως προς την πράξη αυτή. Τα στοιχεία $0, \ \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ έχουν συμμετρικά και ποιά;

2. Θεωρούμε το σύνολο

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

με πράξεις την «+» πρόσθεση πινάκων και «·» πολ/σμό πινάκων. Να δείξετε ότι:

i) Η αλγεβρική δομή $(M, \ +)$ είναι αντιμεταθετική ομάδα.

ii) Η αλγεβρική δομή $(M^*, \ \cdot \ )$ είναι ομάδα.

iii) Η αλγεβρική δομή $(M, \ +, \ \cdot \ )$ είναι σώμα. Κατόπιν να λύσετε στο M την εξίσωση $X^2 + I = \mathbb{O}$.

3. Έστω η ομάδα $(G, \ \cdot \ )$.

i) Να δείξετε ότι για κάθε $a, b \in G$ ισχύει: $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$, όπου με x^{-1} συμβολίζουμε το συμμετρικό (αντίστροφο) του $x \in G$.

ii) Αν ισχύει η σχέση $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ για κάθε $a, b \in G$, να δείξετε ότι η ομάδα G είναι αντιμεταθετική.

4. Ο δακτύλιος $(\Delta, \ +, \ \cdot \ )$ λέγεται δακτύλιος του Boole αν ισχύει: $x^2 = x$ για κάθε $x \in \Delta$. Να δείξετε ότι κάθε δακτύλιος του Boole είναι αντιμεταθετικός και ισχύει $x + x = 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

5. Έστω $(G, \ \cdot \ )$ μία ομάδα και $H \subseteq G, \ H \neq \emptyset$. Το H λέγεται **υποομάδα** της G αν το H είναι ομάδα ως προς την πράξη $\cdot$ της G.
Να δείξετε ότι ένα υποσύνολο $H \neq \emptyset$ της ομάδας G είναι υποομάδα της G αν και μόνο αν ισχύει $x \cdot y^{-1} \in H$ για κάθε $x, y \in H$, όπου y^{-1} είναι το συμμετρικό του $y \in G$.

Σ. Καρανάσιος