

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7 (Σ.Η.Μ.Μ.Υ)

Γραμμικές Απεικονίσεις 2009-10

1. Να βρεθεί ο πίνακας αλλαγής βάσης από την $u=\{\mathbf{u}_1=(1,-1,0), \mathbf{u}_2=(-1,2,1), \mathbf{u}_3=(0,-2,1)\}$ στην κανονική του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{x}=(1,-1,2)$ ως προς τη βάση u .

2. Δίνεται ο χώρος $\mathbb{R}^3$ με βάση την $\{\mathbf{u}_1=(1,1,1), \mathbf{u}_2=(1,-1,0), \mathbf{u}_3=(1,1,-2)\}$ και μια γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ που έχει πίνακα, ως προς τη βάση αυτή, τον

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Να βρεθεί ο τύπος της } T. \text{ (Δηλ. η εικόνα του τυχόντος διανύσματος$$

(x_1, x_2, x_3) ως προς την κανονική βάση.)

3. Ο πίνακας ενός γραμ. μετασχηματισμού $T \in L(\mathbb{R}^3)$ ως προς τη βάση $u=\{\mathbf{u}_1=(1,1,0), \mathbf{u}_2=(0,1,1), \mathbf{u}_3=(1,0,1)\}$ είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Βρείτε τον πίνακα του } T \text{ ως προς τη βάση } v=\{\mathbf{v}_1=(2,1,1), \mathbf{v}_2=(3,0,1),$$

$\mathbf{v}_3=(0,1,3)\}$.

4. Ο πίνακας ενός γραμμικού μετασχηματισμού $T \in L(\mathbb{R}^3)$ ως προς τη βάση $e=\{\mathbf{e}_1=(1,0,0), \mathbf{e}_2=(1,1,0), \mathbf{e}_3=(1,1,1)\}$ είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Βρείτε τον τύπο του } T.$$

5. Δείξτε ότι ο γραμμικός μετασχηματισμός $T \in L(\mathbb{R}^3)$: $T(x,y,z)=(x-3y-2z, y-4z, z)$ είναι αντιστρέψιμος και βρείτε τον αντίστροφό του.

6. Βρείτε μια γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε: $T(1,2,-1)=(1,0)$, $T(2,1,4)=(0,1)$. Δείξτε ότι κάθε τέτοια απεικόνιση στέλνει το $(1,1,1)$ σ' ένα σταθερό σημείο $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^3$.

7. Εστω ο γραμμικός μετασχηματισμός $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ τέτοιος ώστε: $T(1,1)=(-2,0)$ και $T(0,1)=(-1,1)$.

i) Βρείτε τον πίνακα του T : **α)** ως προς την κανονική βάση. **β)** ως προς τη βάση $\mathbf{u}_1=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$, $\mathbf{u}_2=\mathbf{e}_2$.

ii) Δείξτε ότι υπάρχει ο T^{-1} και βρείτε τον πίνακα του T^{-1} ως προς την κανονική βάση.

8. Εστω η γραμμική απεικόνιση $D: P_n \rightarrow P_n$: $D p(t)=p'(t)$ (παράγωγος). Να βρεθεί ο πίνακας της T ως προς τη βάση i) $\{1, t^1, t^2, \dots, t^n\}$. ii) $\{1, 1+t, 1+t^2, \dots, 1+t^n\}$.

9. Εστω η ευθεία (ε): $x=t, y=2t, z=3t, t \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ που απεικονίζει κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$ στην ορθή προβολή του στην ευθεία (ε).

i) Να προσδιοριστεί η T .

ii) Ναδειχθεί ότι είναι γραμμική και να βρεθεί ο πίνακός της ως προς την κανονική βάση.

iii) Να βρεθεί μια βάση του πυρήνα της T . Είναι η T «1-1»;

iv) Τί παριστάνει γεωμετρικά ο πυρήνας της T ;

10. Δίνονται οι απεικονίσεις $D, T: P \rightarrow P$, $D(f) = f'$ και $T(f) = tf$.

i) Δείξτε ότι είναι γραμμικές απεικονίσεις και υπολογίστε την απεικόνιση $D \circ T - T \circ D$.

ii) Δείξτε ότι είναι $(T \circ D)^2 = T \circ D + T^2 \circ D^2$.

Παράδοση μέχρι (Θα οριστεί προσεχώς)

Σ. Καρανάσιος