

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών

Μάθημα: «Γραμμική Άλγεβρα – Αναλυτική Γεωμετρία»

Σεπτέμβριος 2004

ΟΜΑΔΑ Α΄

Ονοματεπώνυμο: _____

ΘΕΜΑ 1 : Δίνεται το σημείο $A(-1,1,1)$ και η ευθεία $(\zeta): x-1=2-y=\frac{z}{2}$.

A) Να βρεθεί σημείο Γ της ευθείας (ζ) ώστε η ευθεία $A\Gamma$ να είναι κάθετη στην (ζ) .

B) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου (π) που περιέχει την ευθεία (ζ) και το σημείο $B(1,1,0)$.

Γ) Να βρεθεί η προβολή του σημείου $A(-1,1,1)$ στο επίπεδο (π) .

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 2: A) Δίνεται η σφαίρα $(\Sigma): (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ και το επίπεδο $(\pi): x+z=1$. Ναδειχθεί ότι το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα και να βρεθεί η ακτίνα και το κέντρο του κύκλου που ορίζεται.

B) Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ μη μηδενικά, ανά δύο μη συγγραμμικά και ανά τρία μη συνεπίπεδα διανύσματα του χώρου να αποδειχθούν οι σχέσεις

1. $(\alpha \times \beta) \times (\gamma \times \alpha) = -(\alpha \beta \gamma) \alpha$

2. $[\delta \times (\alpha \times \beta)] \cdot (\alpha \times \gamma) = -(\alpha \beta \gamma)(\alpha \cdot \delta)$

3. Να δείξετε γεωμετρικά ότι το $(\alpha \times \beta) \times (\gamma \times \alpha)$ είναι συγγραμμικό του α .

Δίνεται η ταυτότητα: $\alpha \times (\beta \times \gamma) = (\alpha \cdot \gamma)\beta - (\alpha \cdot \beta)\gamma$

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ 3: A) Δίνονται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$

$V_1 = \{(x, y, z): x+2y+z=0\}$, $V_2 = \{(x, y, z): x=\frac{y}{\mu}=z, \mu \neq 0\}$. Να βρείτε μια βάση και τη διάσταση σε

κάθε ένα από τους υπόχωρους $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ καθώς και η διάσταση του $V_1 + V_2$

$$(\kappa + \lambda)x + \kappa y + \lambda z = 0$$

B) Να λυθεί το σύστημα: $\lambda x + (\kappa + \lambda)y + \kappa z = 0$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$, αν είναι γνωστό ότι έχει και μη μηδενικές

$$\kappa x + \lambda y + (\kappa + \lambda)z = 0$$

λύσεις.

(Μονάδες 2+1)

ΘΕΜΑ 4: Δίνονται οι πίνακες: $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ και $B = A^4 + 3A^3 - 5A + I$.

A) Να βρείτε τις ιδιοτιμές του A .

B) Με τη βοήθεια του θεωρήματος Cayley – Hamilton να δείξετε ότι $B = -A + I$.

C) Θεωρώντας μια διαγωνοποίηση του A : $A = P\Delta P^{-1}$, χωρίς να υπολογίσετε τους πίνακες P, P^{-1} , να βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα B^{-1} .

(Μονάδες 2)

Διάρκεια εξέτασης 3Ω.

Καλή επιτυχία !