

Γραμμική Άλγεβρα
1^ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (ΠΙΝΑΚΕΣ)
ΣΗΜΜΥ 2008-09

1. Δίνονται οι πίνακες $A, B \in \Pi_\nu$ τέτοιοι ώστε: ο A είναι συμμετρικός, ο B είναι αντισυμμετρικός και ο $A+B$ αντιστρέψιμος. Αν $\Gamma = (A+B)^{-1}(A-B)$, να δείξετε ότι ισχύει: **α)** $\Gamma^T(A+B)\Gamma = A+B$ **β)** $\Gamma^T(A-B)\Gamma = A-B$.

2. Δίνονται οι πραγματικοί $\nu \times \nu$ πίνακες B, Γ και ο πίνακας $A = B + i\Gamma$. Να δείξετε ότι ο A είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνο αν, ο πίνακας $B^T\Gamma$ είναι συμμετρικός και $B^TB + \Gamma^T\Gamma = I$.

3. Να υπολογιστούν οι πίνακες A^ν , $\nu \in \mathbb{N}$ όπου $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Αν $A, B \in \Pi_\nu$, να αποδειχθεί ότι $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

5. Δίνεται ο σύνθετος πίνακας $M = \begin{pmatrix} A & B \\ O & A^{-1} \end{pmatrix}$, όπου $A, B \in \Pi_\nu$. Να βρεθεί πίνακας X τέτοιος ώστε ο σύνθετος πίνακας $N = \begin{pmatrix} A^{-1} & X \\ O & A \end{pmatrix}$ να είναι ο αντίστροφος του M .

6. Αν $A \in \Pi_\nu$ και $A^\kappa = 0$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{N}$ (A : μηδενοδύναμος), να αποδειχθεί ότι ο $I - A$ είναι αντιστρέψιμος.

7. Έστω $A \in \Pi_\nu$ τέτοιος ώστε $(A+2I)^2 = O$. Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να γραφεί ο A^{-1} με την βοήθεια δυνάμεων του A . Να αποδειχθεί επίσης ότι και ο πίνακας $A+3I$ είναι αντιστρέψιμος.

8. Αν οι πίνακες $A, B \in \Pi_\nu$ ικανοποιούν τις σχέσεις $A^2 = A$, $B^2 = B$ και $(A+B)^2 = A+B$, να αποδειχθεί ότι $AB = BA = O$.

9. Διαμερίζοντας κατάλληλα τον $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, υπολογίστε τον A^3 .