

Γραμμική Άλγεβρα
2^ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ)
ΣΗΜΜΥ 2009-10

1. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του τετραγωνικού $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$, αν είναι $a_{ij} = |i - j|$.

(Υπόδειξη. Γράψτε πρώτα τη μορφή της ορίζουσας, υπολογίζοντας π.χ. τα στοιχεία των τριών πρώτων γραμμών... και της τελευταίας. Κατόπιν αφαιρέστε κάθε στήλη από την προηγούμενή της, μετά προσθέστε την πρώτη γραμμή διαδοχικά σε κάθε μια από τις άλλες γραμμές και υπολογίστε την ορίζουσα που θα προκύψει).

2. Να αποδειχθεί ότι
$$\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix} = (b-a)^2(a+b+2x)(a+b-2x).$$

3. i) Να δείξετε ότι για κάθε τετραγωνικό πίνακα A ισχύει: $\det(A^*A) \geq 0$.

ii) Με τη βοήθεια του πίνακα $A = \begin{bmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$ να δείξετε ότι για $a, b, c \in \mathbb{R}$ είναι:

$$D = \begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ca \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ac & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix} \geq 0.$$

4. Να λυθεί η εξίσωση
$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = 0.$$

5. Να υπολογιστεί η $n \times n$ ορίζουσα
$$\begin{vmatrix} x+k & x & \dots & x \\ x & x+k & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \dots & x+k \end{vmatrix}.$$

6. Να δείξετε ότι για την $n \times n$ ορίζουσα $D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$

ισχύει η αναδρομική σχέση $D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x^2D_{n-2}$ και κατόπιν, με τη βοήθεια αυτής της σχέσης, να υπολογίσετε την ορίζουσα D_5 όταν $x=1$ και $x=-1$.

7. Έστω ο $n \times n$ πίνακας $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$. Να αποδειχθεί ότι

$$|xI_n - C| = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0.$$

8. Έστω $A \in \Pi_n$ και $X, Y \in \Pi_{n \times 1}$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε μιγαδικό ξ , ισχύει

$$\det \begin{bmatrix} A & X \\ Y^T & \xi \end{bmatrix} = \xi \cdot \det A - Y^T (\text{adj} A) X.$$

Παράδοση 2-12-09

Σ. Καρανάσιος