A

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ 2ο Εξάμηνο κανονική εξέταση - Ιούνιος 2010 (25–6–10)
Ανάλυση ΙΙ - Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ 1. α) Η θερμοκρασία των σημείων του χώρου $\mathbb{R}^3$ περιγράφεται από τη διαφορίσιμη συνάρτηση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Δίνονται οι εξής τιμές της κατευθυνομένης παραγώγου της T στο σημείο $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$: $D_{\mathbf{u}_1}T(\mathbf{a}) = 3$, $D_{\mathbf{u}_2}T(\mathbf{a}) = 2$, $D_{\mathbf{u}_3}T(\mathbf{a}) = 1$, όπου $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$.

i) Βρείτε την κατευθυνομένη παράγωγο της συνάρτησης T στο σημείο $\mathbf{a}$ ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. **(0.50μ)**

ii) Ποιά είναι η κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού ελάττωσης της T στο σημείο $\mathbf{a}$ **(0.40μ)**

β) Βρείτε μία προσεγγιστική τιμή της παράστασης $\sqrt{4.02} + \sqrt[3]{7.97} + \sqrt[4]{16.02}$, χρησιμοποιώντας τη γραμμική προσέγγιση κατάλληλης συνάρτησης. **(0.60μ)**

γ) Έστω η $\mathcal{C}^2$ συνάρτηση $f = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Θέτοντας $u = x + y$ και $v = x - 3y$, αποδείξτε ότι η εξίσωση $3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ μετασχηματίζεται στην $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$ **(1μ)**

Θ 2. α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $F(x, y, z) = x^2 e^{y+z} + y^2 e^{x+z} + z^2 e^{x+y} - e^2 = 0$, $z \geq 0$ ορίζει μια συνάρτηση $z = f(x, y)$ υπό πεπελεγμένη μορφή. Κατόπιν να βρείτε το πολυώνυμο Taylor 2ης τάξης για την $f(x, y)$, με κέντρο το (0,0). **(1.20μ)**

β) i) Βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 8(x^2 - y^2).$$

(0.60μ)

ii) Βρείτε τα δεσμευμένα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = 2x + y^2 - z^2$ υπό τις δεσμεύσεις $g_1(x, y, z) = x - 2y = 0$ και $g_2(x, y, z) = x + z = 0$. **(0.70μ)**

Θ 3. α) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = \left(\dfrac{-y}{(x-2)^2 + y^2}, \dfrac{x-2}{(x-2)^2 + y^2} \right)$. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος της τεθλασμένης γραμμής ΒΓΑ, όπου Α(1,0), Β(3,0) και Γ τυχόν σημείο του ημίκυκλου $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$. **(1.5μ)**

β) Με τη βοήθεια του θεωρήματος Green να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = \{2xy - x^2, x + y^2\}$ στο σύνορο του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2$ και την ευθεία $y = x$. **(1μ)**

Θ 4. α) Έστω S η επιφάνεια του τριγώνου με κορυφές τα σημεία (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1). Να υπολογιστεί η μάζα της επιφάνειας S, αν η επιφανειακή πυκνότητα της είναι $\rho(x, y, z) = \dfrac{y}{x+1}$. **(1μ)**

β) Δίνεται η καμπύλη γ η οποία ορίζεται ως τομή της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ και του επιπέδου $z = 1$. Με τη χρήση επιφανειακού ολοκληρώματος να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \oint_\gamma y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz,$$

θεωρώντας ως προσανατολισμό της γ, εκείνον που είναι συμβατός με τον προσανατολισμό της προσανατολισμένης επιφάνειας που θα επιλέξετε. **(1.5μ)**

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ