A

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ 2ο Εξάμηνο επαναληπτική εξέταση - Σεπτέμβριος 2010 (6–9–10)
Ανάλυση ΙΙ - Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ 1. α) Έστω η συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2 + 4xy - y^2 + 10y + z^2$.

i) Βρείτε, αν υπάρχει, σημείο $\mathbf{a}$ τέτοιο ώστε η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $\mathbf{a}$ να είναι μηδέν ως προς κάθε κατεύθυνση. **(0.40μ)**

ii) Βρείτε την κατευθυνόμενη παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο $\mathbf{b} = (1,-1,1)$ ως προς εκείνη την κατεύθυνση που η f παρουσιάζει στο $\mathbf{c} = (2,1,-2)$ τον μέγιστο ρυθμό αύξησης. **(0.60μ)**

β) Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο (x_0, y_0, z_0) του κώνου $z^2 = x^2 + y^2$. Δικαιολογήστε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο περιέχει την αρχή των αξόνων. **(0.70μ)**

γ) Έστω οι $\mathcal{C}^1$ συναρτήσεις $u = u(x,y)$ και $v = v(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ και $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$ (όπου $r > 0$), αποδείξτε ότι ισχύουν $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$ και $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$. **(0.80μ)**

Θ 2. α)Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor 2ης τάξης για τη συνάρτηση $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ σε μια περιοχή του σημείου $(0,1)$. Έπειτα σχεδιάστε πρόχειρα την επιφάνεια $z = f(x,y)$ σε μια περιοχή του σημείου $(0,1,f(0,1))$. **(1.20μ)**

β) i) Βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης $f(x,y,z) = x^3 + xy^2 + x^2 + y^2 + 3z^2$. **(0.60μ)**

ii) Η θερμοκρασία σε κάθε σημείο (x,y) του δίσκου $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$ περιγράφεται από τη συνάρτηση $T(x,y) = 9 - x^2 - y^2$, $(x,y) \in D$. Ένα σύρμα C ελλειπτικού σχήματος με εξίσωση $C = \{(x,y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$ τοποθετείται πάνω στο δίσκο D. Να βρείτε τα σημεία του σύρματος όπου η θερμοκρασία T είναι μέγιστη. **(0.70μ)**

Θ 3. α) Θεωρούμε το στερεό S, (σφαιρικός δακτύλιος) που περιγράφεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες από τη σχέση:

$$S : 3 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 4$$

Η συνάρτηση πυκνότητας του S, σ' ένα σημείο του, δίνεται από τον τύπο: $\rho = 0.12 \cdot d^2$, όπου d συμβολίζει την απόσταση του σημείου αυτού από το κέντρο των αξόνων $(3 \leq d \leq 4)$.
Βρείτε τη συνολική μάζα του S, και εξετάστε αν επιπλέει. (Δίνεται ότι η πυκνότητα του νερού είναι 1 gr/cm^3.) **(1,5μ)**

β) Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα του Green, για να βρείτε το έργο ενός διανυσματικού πεδίου

$$\mathbf{F} = x^2 y\mathbf{i} + (x+y)y\mathbf{j},$$

το οποίο επιδρά σ' ένα σημείο που κινείται από την αρχή των αξόνων στο σημείο $(0,1)$, έπειτα κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος από το $(0,1)$ στο $(1,0)$ και μετά ξανά στην αρχή των αξόνων κατά μήκος του άξονα των x. **(1μ)**

Θ 4. α) Υπολογίστε τη μάζα ελλειψοειδούς επιφάνειας

$$S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

αν η επιφανειακή πυκνότητά της είναι

$$\rho(x,y,z) = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

(Σε περίπτωση που χρειαστεί, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ως γνωστό ότι ο όγκος του αντίστοιχου ελλειψοειδούς, δίνεται από τον τύπο $V = \frac{4}{3}\pi abc$.) **(1,3μ)**

β) Να επαληθευτεί το Θεώρημα του Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x,y,z) = (z, xz, y)$ στο τετράγωνο S με κέντρο το σημείο $(0,0,1)$ και πλευρές μήκους 3, παράλληλες προς τους άξονες xx' και yy'.

(1.2μ)

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ