

Ομάδα Α

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών Μάθημα: «Γραμμική Άλγεβρα» Φεβρουάριος 2009

ΘΕΜΑ 1 Α) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τον άξονα $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $(1, 2, -4)$.

Β) Ναδειχθεί ότι οι ευθείες

$$(\varepsilon_1): \frac{x-1}{2} = y = 1-z \text{ και } (\varepsilon_2): x-y-z=2, \quad 2x-y=5$$

τέμνονται και να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν.

ΘΕΜΑ 2 Α) Να βρεθεί η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας με οδηγό την καμπύλη $(c) \ z = x^2 + y^2, \ y + z = 1$ και γενέτειρες παράλληλες στον άξονα $z'z$, και στη συνέχεια μια παραμετρική παράσταση της (c) .

Β) Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \ T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 - x_3, x_1 + x_2)$.

α) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση στον πυρήνα $N(T)$ και το σύνολο τιμών της $R(T)$

β) Να βρεθεί ο πίνακας της ως προς τις βάσεις: $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ για το πεδίο ορισμού και την κανονική για τον δεύτερο χώρο.

ΘΕΜΑ 3 Α) Δίνονται τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^4$: $S_1 = \{(1, -1, 2, -3), (1, 1, 2, 0), (3, -1, 6, -6)\}$ και $S_2 = \{(1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 3)\}$. Να δείξετε ότι δεν παράγουν τους ίδιους υπόχωρους, είναι δηλαδή $U_1 = [S_1] \neq U_2 = [S_2]$. Να βρείτε μια βάση του $U_1 + U_2$ και τις διαστάσεις των $U_1 + U_2, U_1 \cap U_2$.

Β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα παρακάτω συστήματα:

$$\begin{array}{ll} x + 2y + z = \lambda^2 & x + 2y + z = \lambda^2 \\ x + y + 3z = \lambda \quad (\Sigma_1) & \text{και} \quad x + y + 3z = \lambda \quad (\Sigma_2) \\ 3x + 4y + 8z = 8 & 3x + 4y + 7z = 8 \end{array}$$

είναι συγχρόνως συμβιβαστά. Να λύσετε το σύστημα (Σ_2) , όταν $\lambda > 0$.

ΘΕΜΑ 4 Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- i) Να βρείτε τις ιδιοτιμές του A και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά του.
- ii) Να βρείτε μια διαγωνοποίηση του A και να δείξετε ότι ισχύει $A^n = A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.
- iii) Να βρείτε μια διαγωνοποίηση του $B = 2A^3 - 5A^2 + 4A - I$ και να δείξετε ότι ισχύει $B^{2n+1} = B$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Διάρκεια εξέτασης 2.5 ώρες.

Καλή επιτυχία !