

Ομάδα Α

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών Μάθημα: «Γραμμική Άλγεβρα» Σεπτέμβριος 2009

Ονοματεπώνυμο..... Α.Μ.

ΘΕΜΑ 1 Α) Δίδονται τα επίπεδα: $(\pi): x - y + z = 4$, $(\rho): x + y - z = 2$.

Ναδειχθεί ότι τέμνονται και να βρεθεί μια παραμετρική παράσταση της ευθείας που ορίζουν και ένα παράλληλο διάνυσμα της.

Β) Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου k ώστε να υπάρχει επίπεδο που να περιέχει την ευθεία

$(\xi): \frac{x-1}{2} = 1 - y = z - 2$ και να είναι κάθετο στην ευθεία $(\eta): \frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{k}$ και στη συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου αυτού.

ΘΕΜΑ 2 Α) Δίνεται ο κύκλος: $(c) x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $y + z = 3$.

1. Να σχεδιασθεί, σχεδιάζοντας τις επιφάνειες που τον ορίζουν.
2. Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.
3. Να βρεθεί η εξίσωση της προβολής του κύκλου (και να χαρακτηριστεί), στο επίπεδο xOy .

Β) Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_3)$. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση για τον πυρήνα $N(T)$ και για το σύνολο τιμών της $R(T)$.

ΘΕΜΑ 3 Α) Δίνονται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$: $V_1 = \{(x, y, z, w) : x = y, z = y + w\}$ και

$V_2 = \{(x, x + y, 2x - y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Να βρείτε:

1. Βάσεις και τις διαστάσεις των υποχώρων $V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2$, $V_1 + V_2 + (V_1 \cap V_2)$.
2. Έναν υπόχωρο V_3 του $\mathbb{R}^4$ τέτοιον ώστε να είναι $V_1 + V_2 + V_3 = \mathbb{R}^4$.

Β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned}x + y + z &= 3 \\x + 2y + z &= 3 \\x + y + (\lambda^2 - 8)z &= \lambda\end{aligned}$$

1. Να είναι αδύνατο.
2. Να έχει μοναδική λύση.
3. Να έχει άπειρες λύσεις. Στην περίπτωση αυτή να λύσετε το σύστημα.

ΘΕΜΑ 4 Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Να βρείτε τις ιδιοτιμές του A και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά του.
2. Να βρείτε μια διαγωνοποίηση του A .
3. Να βρείτε μια διαγωνοποίηση του πίνακα $B = A + A^{-1}$

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Διάρκεια εξέτασης 2.5 ώρες.

Καλή επιτυχία !