

Ομάδα Α

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών Μάθημα: «Γραμμική Άλγεβρα» Φεβρουάριος 2008

Ονοματεπώνυμο..... Α.Μ.....

ΘΕΜΑ 1^ο Δίνονται τα επίπεδα: $(\pi) x + y - z = 4$ και $(\sigma) x + y + z = 2$

- 1) Να αποδειχθεί ότι τέμνονται και να βρεθεί μια παραμετρική παράσταση της ευθείας (ε) που ορίζουν.
- 2) Να αποδειχθεί ότι η τομή τους (ε) κείται στο επίπεδο $3x + 3y + z = 8$.
- 3) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου (α) που διέρχεται από το σημείο $P(6, 7, 5)$ και είναι κάθετο στην ευθεία (ε) .

ΘΕΜΑ 2: Α) Να σχεδιασθούν οι καμπύλες και να βρεθούν παραμετρικές παραστάσεις: $(\gamma): x^2 + y^2 = 1, z + y = 6$ και $(\varepsilon): z = 4x^2 + y^2, z + y = 6$.

Β) Να σχεδιασθεί και μετά να βρεθεί η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας με οδηγό καμπύλη την (γ) και γενέτειρες κάθετες στο επίπεδο $z + y = 6$.

ΘΕΜΑ 3^ο : Α) Να αποδείξετε ότι τα σύνολα

$$V = \{(x, y, z) : x + y - z = 0, x + y + z = 0\} \text{ και } U = \{(x, y, z) : x + y - z = 0\}$$

είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$. Να βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^\perp$ του V και κατόπιν μια βάση και τη διάσταση του $U \cap V^\perp$.

Β) Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, με $T(1, -1) = (1, 2, -1)$, $T(-1, 0) = (-1, 0, 1)$. Αφού, βρείτε τις συντεταγμένες του (x, y) , ως προς τη βάση $\{(1, -1), (-1, 0)\}$ του $\mathbb{R}^2$, να βρείτε τον τύπο της T , τον πυρήνα της και το σύνολο τιμών της.

ΘΕΜΑ 4^ο : Α) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_5 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \quad (\Sigma) \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Β) Δίνεται η γραμμική απεικόνιση

$$T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z, w) = (z + w, z - 2y, w + x).$$

Να βρείτε τον πίνακα της T ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3$.

Γ) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ \alpha & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Να βρείτε την τιμή του α ώστε ο πίνακας A να έχει ως

ιδιοδιάνυσμα το $X = [2 \ 1 \ -2]^T$. Κατόπιν να βρείτε μια διαγωνοποίηση του A^2 .

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 45 λεπτά.

Καλή επιτυχία !