

ΟΜΑΔΑ Α

Σγολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Μάθημα: «Μαθηματικά Ιβ» Σεπτέμβριος 2011

Ονοματεπώνυμο.....

ΘΕΜΑ 1^ο : Α) Δίνονται η ευθεία: $(\zeta): x-1=y=\frac{z-5}{8}$ και τα επίπεδα $(\pi): 7x-y-z=-6$ και

$(\sigma): x-y=-1$.

1. Να αποδειχθεί ότι η (ζ) τέμνει το (π) και να βρεθεί το σημείο τομής.
2. Να δειχθεί ότι η (ζ) είναι παράλληλη στο (σ) .
3. Να δειχθεί ότι τα επίπεδα (π) και (σ) τέμνονται και να βρεθεί μια παραμετρική παράσταση της τομής τους (ϵ) .
4. Να δειχθεί ότι οι ευθείες (ϵ) και (ζ) είναι ασύμβατες και να αποτυπώσετε σε ένα σκαρίφημα τις σχετικές θέσεις των (ζ) , (π) , (σ) και (ϵ) .

Β) Αν είναι γνωστό ότι για δυο διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ισχύει $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1, 2, 2)$ να βρεθεί το διάνυσμα $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

ΘΕΜΑ 2 Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- i) Να βρείτε μια διαγωνοποίηση του A .
- ii) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του $B = A^6$ και μια διαγωνοποίησή του.
- iii) Να δειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να εκφρασθεί ο $G = A^{-1}$ συναρτήσει δυνάμεων του A το πολύ βαθμού 2 με χρήση του θεωρήματος Cayley-Hamilton.

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = a$$

ΘΕΜΑ 3 Δίνεται το σύστημα: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = b$ (Σ) , όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$ είναι παράμετροι.

$$5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = c$$

- i) Να προσδιοριστεί η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να είναι συμβιβαστό.
- ii) Για $a = 2, b = 1, c = 1$ να λυθεί το σύστημα.

ΘΕΜΑ 4 Α) Δίνεται ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας A που ικανοποιεί τη σχέση $(A + 2I)^2 = 0$. Να δείξετε ότι ο A αντιστρέφεται και να βρείτε τον αντίστροφό του ως πολυώνυμο του A και του I

Β) Δίνεται το υποσύνολο του $\mathbb{R}^4$: $S = \{(3, 2, 1, 1), (7, 5, 5, 3), (3, 1, 1, -1), (4, 3, 3, 2)\}$.

- i) Να βρείτε μια βάση και τη διάσταση του υπόχωρου $V = [S]$ που παράγει το S .
- ii) Να βρείτε, αν υπάρχει, την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $x = (\lambda + 3, 1 - \lambda, 1 - \lambda, \lambda + 7)$ να ανήκει στον υπόχωρο V .

Το κάθε θέμα βαθμολογείται με 2 μονάδες. Με 2 μονάδες βαθμολογείται και το θέμα της Παραστατικής Γεωμετρίας που είναι σε ξεχωριστό φύλλο.

Σύνολο $2 \times 4 + 2 = 10$ μονάδες

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες (συνολικά)