

Γραμμική Άλγεβρα
1^ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (ΠΙΝΑΚΕΣ)
ΜΜ 2013-14

1. Δίνονται οι αντιστρέψιμοι πίνακες $X, Y \in \Pi_\nu$. Να δείξετε ότι :

$$\text{i) } (X^{-1})^T = (X^T)^{-1} \quad \text{ii) } [(XY)^{-1}]^T = (X^T)^{-1} (Y^T)^{-1}$$

2. Έστω $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1+\lambda \\ 1-\lambda & -\lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. i) Να αποδείξετε ότι είναι $A^\nu = \begin{cases} I & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ A & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $I + A + A^2 + \dots + A^{2\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

3. Δίνονται οι πίνακες $A, B \in \Pi_\nu$ τέτοιοι ώστε: ο A είναι συμμετρικός, ο B είναι αντισυμμετρικός και ο $A+B$ αντιστρέψιμος. Αν $\Gamma = (A-B)(A+B)^{-1}$, να δείξετε ότι και ο $A-B$ αντιστρέφεται και ισχύει:

$$\alpha) \Gamma (A+B)^T \Gamma^T = A-B \quad \beta) \Gamma^{-T} (A-B)^2 \Gamma^T = (A+B)^2.$$

4. Δίνονται οι πραγματικοί $\nu \times \nu$ πίνακες B, Γ και ο πίνακας $A = B + i\Gamma$. Να δείξετε ότι ο A είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνο αν, ο πίνακας $B^T \Gamma$ είναι συμμετρικός και $B^T B + \Gamma^T \Gamma = I$.

5. Να υπολογιστούν οι πίνακες A^ν , $\nu \in \mathbb{N}$ όπου $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Αν $A, B \in \Pi_\nu$, να αποδειχθεί ότι:

i) $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$. ii) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. iii) Δεν υπάρχουν πίνακες $A, B \in \Pi_\nu$ τέτοιοι ώστε $AB - BA = I$. (iv) Αν $A \in \Pi_\nu$ τέτοιος ώστε $\text{tr}(AA^*) = 0$, τότε $A = O$.

7. Αν ο πίνακας $A \in \Pi_\nu$ ικανοποιεί τη σχέση $I + A + \dots + A^k = O$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ να αποδειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος με $A^{-1} = A^k$.

8. Έστω $A \in \Pi_\nu$ τέτοιος ώστε $(A+3I)^2 = O$. Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να γραφεί ο A^{-1} με την βοήθεια δυνάμεων του A . Να αποδειχθεί επίσης ότι και ο πίνακας $A+I$ είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

9. Αν οι πίνακες $A, B \in \Pi_\nu$ ικανοποιούν τις σχέσεις $A^2 = A$, $B^2 = B$ και $(A+B)^2 = A+B$, να αποδειχθεί ότι $AB = BA = O$.

10. Διαμερίζοντας κατάλληλα τον $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, υπολογίστε τον A^3 .