

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Άσκηση 1. Να βρεθεί ο συμπληρωματικός πίνακας (adjoint) και η ορίζουσα του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Είναι ο A αντιστρέψιμος; Αν ναι να βρεθεί και ο A^{-1} .

Λύση. Ξέρουμε ότι: $\text{adj}(A) = (A_{ij})^T = (A_{ji})$, όπου $A_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$ και D_{ij} η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τον πίνακα A αν διαγράψουμε την i -γραμμή και j -στήλη. Έχουμε:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 8, & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5, & A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1, \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -29, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -18, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 3, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 11, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1. \end{aligned}$$

Άρα

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{aligned} \det A &= \alpha_{11}A_{11} + \alpha_{12}A_{12} + \alpha_{13}A_{13} = 3 \cdot 8 + (-4) \cdot 5 + 5 \cdot (-1) = -1 \\ &= \alpha_{12}A_{12} + \alpha_{22}A_{22} + \alpha_{32}A_{32} = (-4) \cdot 5 + (-3) \cdot (-18) + (-5) \cdot 7 = -1 \end{aligned}$$

κ.λ.π., όπου η πρώτη έκφραση της $\det A$ είναι το ανάπτυγμα της ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής της και η δεύτερη ως προς τα στοιχεία της 2ης στήλης της. Επειδή $D(A) = -1 \neq 0$ ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος με

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)}\text{adj}(A) = \frac{1}{D(A)} \begin{bmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2. Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Λύση. Είναι:

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{D(A)} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{D(A)} \begin{bmatrix} 39 & 18 & 3 \\ -30 & 0 & 15 \\ -6 & -27 & 3 \end{bmatrix}$$

και $D(A) = \alpha_{11}A_{11} + \alpha_{21}A_{21} + \alpha_{31}A_{31} = 135$, οπότε:

$$A^{-1} = \frac{1}{135} \begin{bmatrix} 39 & 18 & 3 \\ -30 & 0 & 15 \\ -6 & -27 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{135} \cdot 3 \begin{bmatrix} 13 & 6 & 1 \\ -10 & 0 & 5 \\ -2 & -9 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{45} \begin{bmatrix} 13 & 6 & 1 \\ -10 & 0 & 5 \\ -2 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3. Να βρεθεί με στοιχειώδεις πράξεις ο αντίστροφος του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση. Με στοιχειώδεις πράξεις (Γραμμοπράξεις) στις γραμμές του πίνακα $[A|I]$ μετατρέπουμε τον A σε μοναδιαίο (αυτό μπορεί να γίνει μόνο αν ο A αντιστρέφεται), οπότε, συγχρόνως, ο μοναδιαίος πίνακας I μετασχηματίζεται στον αντίστροφο του A .

Έχουμε:

$$\begin{aligned} [A|I] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - \gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + \gamma_2 \\ \sim \\ \gamma_2 \rightarrow -\gamma_2 \end{array} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow 1/4 \gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + 2\gamma_3 \\ \sim \\ \gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_3 \end{array} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - \gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα ο αντίστροφος του πίνακα A είναι ο:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = -1/4 \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$