

ΟΜΑΔΑ Α
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Μάθημα: «**Μαθηματικά Ιβ**» Σεπτέμβριος 2014

Ονοματεπώνυμο.....

ΘΕΜΑ 1. Αν $\|\mathbf{a}\| = 4$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 5$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 1$, $\|\mathbf{c}\| = 3$ και $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ συνεπίεδα να υπολογισθούν με κάθε λεπτομέρεια οι παραστάσεις:

$$A = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad B = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}),$$

$$\Gamma = \mathbf{c} \times ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}), \quad \Delta = \mathbf{c} \cdot ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}).$$

Β) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $A(1,2,3)$ από την ευθεία: $\frac{x-1}{2} = y = 1-z$

ΘΕΜΑ 2 Α) Τι σημαίνει ότι δύο πίνακες A και B είναι όμοιοι.

Β) Τι σημαίνει ότι ένας τετραγωνικός πίνακας είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα (διαγωνοποιήσιμος)?

Γ) Να εξεταστεί αν ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$, $a, \beta \in \mathbb{R}$ είναι όμοιος με κάποιο διαγώνιο πίνακα.

Δ) Να αποδειχθεί, χωρίς να διαγωνοποιηθεί, ότι ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

Ε) Να βρεθούν δύο διαγώνιοι πίνακες Δ , Δ_1 όμοιοι με τον B .

Προσοχή στα σύμβολα: Το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων συμβολίζεται με $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ και εξωτερικό γινόμενο με $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ και ο πολλαπλασιασμός επί αριθμό λ με $\lambda \mathbf{a}$. Αν υπάρχει οτιδήποτε άλλο στη λύση σας όπως π.χ. $\mathbf{ab}$, δεν θα λαμβάνεται υπόψη η λύση.

ΘΕΜΑ 3 Α) i) Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες A , B τέτοιοι ώστε $AB = k\delta_{ij}$, όπου $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i=j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$

και $k \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι ο A αντιστρέφεται και βρείτε τον αντίστροφό του.

ii) Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Υπολογίστε τους πίνακες $(AB)^T$, $B^T A^T$. Τι παρατηρείτε?

$$x + 2y + z = \alpha^2$$

Β) Δίνεται το σύστημα: $x + y + 3z = \alpha$ (Σ), όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ παράμετρος.

$$3x + 4y + 7z = 8$$

i) Να προσδιοριστούν οι τιμές του α ώστε το σύστημα να είναι συμβιβαστό.

ii) Να λυθεί το σύστημα όταν $\alpha = 2$.

ΘΕΜΑ 4 Δίνονται υπόχωροι: $V_1 = [(1, 2, -1, 4), (-1, -2, 6, -7), (2, 4, 3, 5)]$ και

$$V_2 = [(1, 2, 7, -4), (-1, -2, 3, -2), (1, 2, 2, -1)] \text{ του } \mathbb{R}^4.$$

i) Να βρείτε μια βάση και τη διάσταση για τον καθένα από τους υποχώρους: V_1 , V_2 , $V_1 + V_2$.

ii) Να βρείτε τη διάσταση του υπόχωρου $V_1 \cap V_2$.

Τα Θέματα είναι ισοδύναμα. Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ