

ΟΜΑΔΑ Α

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Μάθημα: «Μαθηματικά Ιβ»

Φεβρουάριος 2011

Ονοματεπώνυμο.....

ΘΕΜΑ 1 Α) Ναδειχθεί ότι οι ευθείες

$$(\varepsilon_1): \frac{x-1}{2} = y = 1-z \text{ και } (\varepsilon_2): x-y-z=2, \quad 2x-y=5$$

τέμνονται και να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν.

Β) Για τα διανύσματα $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 3)$, $\mathbf{c} = (2, 1, 3)$ να υπολογισθούν τα

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}, \quad |\mathbf{a}|^2 \mathbf{b} - |\mathbf{b}|^2 \mathbf{a}.$$

$$ax + bz = 2$$

ΘΕΜΑ 2 Δίνεται το σύστημα: $ax + 2y + az = b$ (Σ), όπου $a, b \in \mathbb{R}$ είναι
 $bx + 2y + az = a$

παράμετροι.

- Να προσδιοριστούν οι τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση.
- Για $b = 0$ να βρεθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να είναι συμβιβαστό.
- Για $b = 0$ και $a = -2$ να λυθεί το σύστημα.

ΘΕΜΑ 3 Δίνονται τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^4$:

$$V_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0, \quad x + z = 0\} \text{ και}$$

$$V_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y - w = 0, \quad x - z = 0\}.$$

- Να δείξετε ότι τα V_1, V_2 είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ και να βρείτε από μια βάση και τη διάστασή τους.
- Να βρείτε μια βάση και τη διάσταση του $V_1 \cap V_2$ καθώς και τη διάσταση του $V_1 + V_2$.

ΘΕΜΑ 4 Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Να βρείτε μια διαγωνοποίηση του A .
- Να εκφραστεί ο $B = A^4$ συναρτήσει δυνάμεων του A το πολύ βαθμού 2 με χρήση του θεωρήματος Cayley-Hamilton.

Το κάθε θέμα βαθμολογείται με 2 μονάδες. Με 2 μονάδες βαθμολογείται και το θέμα της Παραστατικής Γεωμετρίας που είναι σε ξεχωριστό φύλλο.

Σύνολο $2 \times 4 + 2 = 10$ μονάδες το άριστα

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 45' λεπτά (συνολικά)