Ενδεικτικές Λύσεις Φυλλαδίου 1

1. **i)** Είναι $[XX^{-1}]^\top = I^\top = I \Rightarrow (X^{-1})^\top X^\top = I \Rightarrow (X^\top)^{-1} = (X^{-1})^\top$. **ii)** Είναι: $[(XY)^{-1}]^\top = [Y^{-1}X^{-1}]^\top = (X^{-1})^\top (Y^{-1})^\top \overset{(i)}{=} (X^\top)^{-1}(Y^\top)^{-1}$.

2. **i)** Είναι $A^2 = I$ και $A^3 = A^2A = IA = A$, οπότε για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ έχουμε: $A^{2\nu} = (A^2)^\nu = I^\nu = I$ και $A^{2\nu+1} = A^{2\nu}A = IA = A$.
ii) $I + A + A^2 + \cdots + A^{2\nu} = (I + A^2 + A^4 + \cdots + A^{2\nu}) + (A + A^3 + \cdots + A^{2\nu-1}) = (\nu+1)I + \nu A$.

3. Είναι $A = A^\top$, $B^\top = -B$, οπότε $A - B = (A+B)^\top$ και $(A-B)^{-1} = [(A+B)^\top]^{-1} = [(A+B)^{-1}]^\top$. Επιπλέον έχουμε:

$$\begin{aligned}
\Gamma(A+B)^\top\Gamma^\top &= (A-B)(A+B)^{-1}(A+B)^\top[(A+B)^{-1}]^\top(A-B)^\top \\
&= (A-B)(A+B)^{-1}(A^\top+B^\top)[(A+B)^\top]^{-1}(A-B)^\top \\
&= (A-B)(A+B)^{-1}(A-B)[(A^\top+B^\top)]^{-1}(A^\top-B^\top) \\
&= (A-B)(A+B)^{-1}(A-B)(A-B)^{-1}(A+B) \\
&= (A-B)(A+B)^{-1}\, I\,(A+B) = A-B.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{-1}(A-B)^2\Gamma^\top &= (A+B)(A-B)^{-1}(A-B)^2[(A+B)^{-1}]^\top(A-B)^\top \\
&= (A+B)(A-B)[(A+B)^\top]^{-1}(A^\top-B^\top) \\
&= (A+B)(A-B)(A-B)^{-1}(A+B) \\
&= (A+B)^2.
\end{aligned}$$

4. A ορθομοναδιαίος αν και μόνο αν
$A^*A = I \Leftrightarrow (B^\top - i\Gamma^\top)(B^\top + i\Gamma^\top) = I \Leftrightarrow B^\top B + iB^\top\Gamma - i\Gamma^\top B + \Gamma^\top\Gamma = I \Leftrightarrow$
$(B^\top B + \Gamma^\top\Gamma) + i(B^\top\Gamma - \Gamma^\top B) = I$, από όπου έχουμε: $B^\top B + \Gamma^\top\Gamma = I$ και $B^\top\Gamma - \Gamma^\top B = \mathbb{O}$ ισοδύναμα $B^\top B + \Gamma^\top\Gamma = I$ και $B^\top\Gamma = \Gamma^\top B = (B^\top\Gamma)^\top$, οπότε $B^\top\Gamma$ συμμετρικός.

5. Είναι:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

και $A^5 = \mathbb{O}$, οπότε $A^\nu = \mathbb{O}$ για κάθε $\nu \geq 5$.

6. Αν $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ τότε

$$\text{i)} \quad tr(A+B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = tr(A) + tr(B).$$

$$\text{ii)} \quad tr(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji}a_{ij} = tr(BA).$$

iii) Από i) και ii) έχουμε $n = tr(I) = tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA) = 0$, αδύνατο.

iv) Έστω $A=(a_{ij})$, $A^*=(b_{ij})$, οπότε $b_{ij}=\overline{a_{ji}}$, και

$$tr(AA^*)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\overline{a_{ij}}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2=0$$

$\Rightarrow a_{ij}=0$ για κάθε $i,j=1,2,...,n \Rightarrow A=\mathbb{O}$.

7. Είναι: $-A-A^2-\cdots-A^\kappa=I \Rightarrow A(-I-A+\cdots+A^{\kappa-1})=I$
$\Rightarrow A^{-1}=-I-A-\cdots-A^{\kappa-1}=A^\kappa$.

8. $(A+3I)^2=\mathbb{O} \Rightarrow A^2+6A+9I=\mathbb{O} \Rightarrow A(A+6I)=-9I \Rightarrow A(-\frac{1}{9}(A+6I))=(-\frac{1}{9}(A+6I))A=I \Rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{9}(A+6I)$.

$\mathbb{O}=(A+3I)^2=((A+I)+2I)^2=(A+I)^2+4(A+I)+4I=\mathbb{O} \Rightarrow (A+I)((A+I)+4I)=((A+I)+4I)(A+I)=-4I \Rightarrow (A+I)^{-1}=-\frac{1}{4}(A+5I)$.

9. $(A+B)^2=A+B \Rightarrow A^2+AB+BA+B^2=A+B \Rightarrow A+AB+BA+B=A+B \Rightarrow AB+BA=\mathbb{O}$ (1).
Από (1) παίρνουμε: $\left\{\begin{array}{ll} A^2B+ABA & =\mathbb{O} \\ ABA+BA^2 & =\mathbb{O}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} AB & =-ABA \\ BA & =-ABA\end{array}\right\} \Rightarrow AB=BA \quad (2).$

Από (1),(2) προκύπτει $AB=BA=\mathbb{O}$.
10.

$$A=\left[\begin{array}{rr|r|rr} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow A^3=\left[\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^3 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & [2]^3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^3 \end{array}\right]=$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -19 & 27 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & [8] & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \end{array}\right] \Rightarrow A^3=\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -19 & 27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$