Ενδεικτικές Λύσεις Φυλλαδίου 2

1. Είναι

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & n-2 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & 2n-3 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 2n-4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = (\text{άνω τριγωνική})\ (-1)(-2)^{n-2}(n-1) \\
&= (-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1).
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+2x & a & b & x \\ a+b+2x & x & x & b \\ b+2x+a & x & x & a \\ 2x+b+a & b & a & x \end{vmatrix} = (a+b+2x)\begin{vmatrix} 1 & a & b & x \\ 0 & x-a & x-b & b-x \\ 0 & x-a & x-b & a-x \\ 0 & b-a & a-b & 0 \end{vmatrix} =
$$

$$
(a+b+2x)\begin{vmatrix} x-a & x-b & b-x \\ x-a & x-b & a-x \\ b-a & a-b & 0 \end{vmatrix} = (a+b+2x)(b-a)\begin{vmatrix} x-a & x-b & b-x \\ x-a & x-b & a-x \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =
$$

$$
(a+b+2x)(b-a)\begin{vmatrix} 0 & 0 & b-a \\ x-a & x-b & a-x \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (a+b+2x)(b-a)^2\begin{vmatrix} x-a & x-b \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =
$$

$(a+b+2x)(b-a)^2(a+b-2x)$.

3. (i) Είναι: $|A^*A| = |A^*|\,|A| = |\overline{A}^\top|\,|A| = |\overline{A}|\,|A| = \overline{|A|}\,|A| = |\det A|^2 \geq 0$.
(ii) Ο πίνακας A έχει ορίζουσα $|A| = -2abc$, και είναι $\det(AA^\top) = D$ οπότε, από (i), έχουμε: $D = \det(AA^\top) = |-2abc|^2 = 4a^2b^2c^2 \geq 0$

4.

$$
\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ x+a+b+c & x & b & c \\ x+a+b+c & b & x & c \\ x+a+b+c & b & c & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & a-b & x-b & 0 \\ 0 & b-a & c-b & c-x \end{vmatrix} =
$$

$$
(x+a+b+c)\begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 \\ a-b & x-b & 0 \\ b-a & c-b & c-x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x-a)(x-b)(c-x)
$$

5. Προσθέτουμε όλες τις στήλες στην 1η, βγάζουμε τον κοινό παράγοντα και με την 1η γραμμή μηδενίζουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της 1ης στήλης:

$$
\begin{vmatrix} x+k & x & \cdots & x \\ x & x+k & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x & x & \cdots & x+k \end{vmatrix} = (k+nx)\begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{vmatrix} = (k+nx)k^n
$$

6. Αναπτύσσουμε την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής, οπότε παίρνουμε:

$$\begin{aligned} D_n &= (1+x^2)D_{n-1} - x\begin{vmatrix} x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} \\ &= (1+x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2} (\text{ανάπτυγμα ως προς την 1η στηλη}) \end{aligned}$$

Είναι, για $x=1$: $D_5 = 2D_4 - D_3$ και $D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$, $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$, οπότε $D_5 = 2\cdot 5 - 4 = 6$. Ίδια τιμή βρίσκουμε και $x=-1$.

7.

$$|xI_n - C| = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix} = (\text{πολ/με την 2η στήλη επί } x, \text{ την 3η επί } x^2 \text{ κ.ο.κ.}$$

την τελευταία στήλη επί x^{n-1} και τις προσθέτουμε στην 1η στήλη, οπότε προκύπτει η ορίζουσα)

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ p(x) & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}, \quad \text{όπου } p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της 1ης στήλης παίρνουμε:
$|xI_n - C| = (-1)^{n+1}p(x)(-1)^{n-1} = p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$.

8.

$$D = \begin{vmatrix} A & X \\ Y^\top & \xi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n & \xi \end{vmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας την τελευταία ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής, χρησιμοποιώντας τον τύπο (6.7) του βιβλίου, (σελ. 168), έχουμε:

$$D = y_1 D_1 + \cdots + y_n D_n + \xi det A, \qquad (1)$$

όπου $D_i = (-1)^{n+1+i}D_i'$ το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου y_i. Αν τώρα αναπτύξουμε κάθε μια από τις ορίζουσες D'_i ως προς τα στοιχεία της τελευταίας στήλης παίρνουμε:

$$\begin{aligned} y_1 D_1 + \cdots + y_n D_n &= y_1(-1)^{n+2}(\sum_{i=1}^{n} x_i(-1)^{n+2i+1}A_{i1}) + y_2(-1)^{n+3}(\sum_{i=1}^{n} x_i(-1)^{n+2i+2}A_{i2}) + \cdots \\ &+ y_n(-1)^{2n+1}(\sum_{i=1}^{n} x_i(-1)^{n+2i+n}A_{in}) \\ &= -y_1(\sum_{i=1}^{n} x_i A_{i1}) - y_2(\sum_{i=1}^{n} x_i A_{i2}) - \cdots - y_n(\sum_{i=1}^{n} x_i A_{in}) = \end{aligned}$$

$$-\,[y_1 \cdots y_n] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = -Y^\top(\mathrm{adjA})\mathrm{X}. \qquad (2)$$

Από (1),(2) προκύπτει το ζητούμενο.