# Ενδεικτικές Λύσεις Φυλλαδίου 3

**1.**(i) Είναι

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

οπότε $x_3 = \frac{5}{6}x_4 + \frac{1}{6},\ x_2 = -\frac{7}{6}x_4 + \frac{1}{6},\ x_1 = \frac{5}{6}x_4 + \frac{1}{6},\ x_4 \in \mathbb{R}$

(ii) Ομοίως

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccrcc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \text{αδύνατο}$$

**2.** (i) Είναι $D = \begin{vmatrix} \lambda & 3 & 4 \\ \lambda & 5 & 7 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

• $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1,\ -1$. Σύστημα Cramer, άρα μοναδική λύση η: $x = \frac{-2+3\lambda}{\lambda^2-1},\ y = \frac{3(2\lambda-3)}{\lambda^2-1},\ z = \frac{-2(2\lambda-3)}{\lambda^2-1}$

• $D = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -1$

⋄ Έστω $\lambda = 1$. Τότε

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \text{αδύνατο}$$

⋄ Έστω $\lambda = -1$. Τότε

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|c} -1 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{rcc|c} -1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow \text{αδύνατο}$$

(ii) Όμοια, όπως στο προηγούμενο σύστημα, έχουμε: $D = \lambda^2(\lambda - 1)$

• $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0,\ 1$. Σύστημα Cramer, άρα μοναδική λύση η: $x = \frac{9-15\lambda+3\lambda^2+\lambda^3}{\lambda^2(\lambda-1)}$, $y = \frac{-9+12\lambda+\lambda^3}{\lambda^2(\lambda-1)},\ z = \frac{-9+12\lambda+3\lambda^2-4\lambda^3}{\lambda^2(\lambda-1)}$.

• $D = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 1$. Και στις δύο περιπτώσεις τα αντίστοιχα συστήματα είναι αδύνατα.

**3.** (i) $D = a^2(a-b)^2$

• $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ και $a \neq b$. Τότε $x = \frac{a^2(1-b)}{a-b},\quad y = \frac{-b+a^2b}{a^2-ab},\quad z = \frac{1-a}{a^2-ab}$.

• $D = 0 \Leftrightarrow a = 0,\ b \in \mathbb{R}$ ή $a = b$.

⋄ Για $a = 0$ σύστημα αδύνατο.

⋄ Για $a = b,\ a \neq 0$ έχουμε:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a \\ a & a^2 & a^3 & a^3 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a^3-a \end{array}\right] \Rightarrow$$

• $a \neq 1$ σύστημα αδύνατο.

• $a=1$ το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $x+y+z=1$. Άρα $z=1-x-y$, οπότε γενική λύση

$(x,y,z)=(x,y,1-x-y)=(0,0,1)+x(1,0,-1)+y(0,1,-1),\ \ x,y\in\mathbb{R}$.

(ii) $D=(a-b)(b-c)(c-a)$

• $D\neq 0\Rightarrow x=abc,\ \ y=-ab-ac-bc,\ \ \ z=a+b+c$

• $D=0\Leftrightarrow a=b$ ή $b=c$ ή $c=a$

$\diamond\ a=b,\ \ b\neq c\Rightarrow$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & a & a^2 & a^3\\ 1 & a & a^2 & a^3\\ 1 & c & c^2 & c^3\end{array}\right]\sim\cdots\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -ac & -a^2c-ac^2\\ 0 & 1 & a+c & a^2+ac+c^2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\Rightarrow$$

$x=(ac)z-a^2c-ac^2,\ \ \ y=-(a+c)z+a^2+ac+c^2,\ \ \ z\in\mathbb{R}$.

Όμοια αντιμετωπίζονται, λόγω συμμετρίας, και οι περιπτώσεις $b=c$, $c=a$.

$\diamond\ a=b=c\Rightarrow$ το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $x+ay+a^2z=a^3$, οπότε $x=a^3-ay-a^2z$ και

$(x,y,z)=(a^3-ay-a^2z,y,z)=(a^3,0,0)+y(-a,1,0)+z(-a^2,0,1),\ \ y,z\in\mathbb{R}$.

**4.** Είναι

$$[A|B]=\left[\begin{array}{rrrr|c}5 & 2 & -1 & -3 & a\\ 2 & 1 & 1 & 0 & b\\ -1 & 0 & 3 & 3 & c\end{array}\right]\sim\cdots\sim\left[\begin{array}{rrrr|c}1 & 0 & -3 & -3 & -c\\ 0 & 1 & 7 & 6 & b+2c\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2b+c\end{array}\right].$$

Άρα το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν $a-2b+c=0$. Τα διανύσματα $(a,b,c)\in\mathbb{R}$ για τα οποία το σύστημα έχει λύση, αποτελούν διανυσματικό χώρο τον:
$V=\{(a,b,c):a-2b+c=0\}=\{(2b-c,b,c):b,c\in\mathbb{R}\}=\{b(2,1,0)+c(-1,0,1):b,c\in\mathbb{R}\}=[(2,1,0),\ (-1,0,1)]$ με $\mathrm{dimV}=2$.

**5.** Είναι: $D=(a+2)(a+6-\sqrt{3})(a+6+\sqrt{3})$, οπότε

• $D\neq 0\Rightarrow a\neq -2,-6\pm\sqrt{3}\Rightarrow$ μοναδική λύση για κάθε $b,c\in\mathbb{R}$.

• $D=0\Leftrightarrow a=-2$, ή $a=-6-\sqrt{3}$, ή $a=-6+\sqrt{3}$

$\diamond\ a=-2\Rightarrow$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{rrr|c}1 & -2 & 3 & 4\\ 3 & -5 & 9 & b\\ 4 & -8 & 12 & c\end{array}\right]\sim\cdots\sim\left[\begin{array}{rrr|c}1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 0 & b-12\\ 0 & 0 & 0 & c-16\end{array}\right].$$

Επομένως το σύστημα έχει λύση αν και μόνο αν $c-16=0\Leftrightarrow c=16$. Τα αντίστοιχα διανύσματα $(a,b,c)=(-2,b,16)=(-2,0,16)+b(0,1,0),\ \ b\in\mathbb{R}$ δεν αποτελούν διανυσματικό χώρο.