

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ**

20-1-2005

ΘΕΜΑ 1^ο Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 1, 2)$, $\vec{\beta} = (-1, 0, 1)$.

- (i) Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\gamma}$ κάθετο στα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
- (ii) Να βρεθεί μία εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma}$.
- (iii) Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου $M(13, 0, 20)$ ως προς το επίπεδο (Π) με εξίσωση $10x + 3y - z = 0$.

ΘΕΜΑ 2^ο Δίνονται τα υποσύνολα

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}, \quad Q = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

του διανυσματικού χώρου των 2×2 πραγματικών πινάκων $M_2(\mathbb{R}) = \Pi_2(\mathbb{R})$.

- (i) Να εξετάσετε, αν αυτά είναι υπόχωροι του $M_2(\mathbb{R})$ και, αν είναι υπόχωροι, να βρείτε μία βάση τους
- (ii) Να επεκτείνετε τη βάση που θα βρείτε σε βάση του $M_2(\mathbb{R})$.

ΘΕΜΑ 3^ο Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T: D \rightarrow D$, όπου D είναι το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου, με τύπο

$$T(\vec{u}) = \vec{a} \times \vec{u}, \text{ όπου } \vec{a} = (1, 1, 1) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

- (i) Να βρεθεί ο πίνακας της T ως προς την κανονική βάση $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ του D .
- (ii) Να βρεθεί ο πυρήνας $\ker T$ της T και μία βάση του.
- (iii) Να βρεθεί μία βάση της εικόνας $\text{Im } T$ της T .

ΘΕΜΑ 4^ο (Α) Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n και $f: V \rightarrow V$ μία γραμμική απεικόνιση. Να αποδείξετε ότι :

η απεικόνιση f είναι 1-1, αν, και μόνον αν, για οποιοδήποτε υποσύνολο $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων του V και για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, το σύνολο $\{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_k)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

(Β) Έστω ένας 4×4 πραγματικός πίνακας M τέτοιος ώστε

$$M \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot M^T - M^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \cdot M = O.$$

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει 4×1 πίνακας B τέτοιος ώστε το γραμμικό σύστημα $MX = B$ να έχει μοναδική λύση.

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

Καλή επιτυχία