

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
28-2-2008**

ΘΕΜΑ 1^ο Δίνονται σημείο $P(1,0,3)$, επίπεδο Π με εξίσωση $x+y+z=13$ και η ευθεία $\varepsilon: x-1=-2y=z-3$. Να βρεθεί:

- (i) Το συμμετρικό P' του P ως προς το επίπεδο Π . (Μονάδες 1,5)
- (ii) Η ευθεία που περνάει από το σημείο P' και είναι παράλληλη προς την προβολή της ευθείας ε στο επίπεδο Π . (Μονάδες 1)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται τα υποσύνολα

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}, U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix} : \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\}$$

του συνόλου $M_2(\mathbb{R})$ των 2×2 πραγματικών πινάκων.

- (i) Να αποδείξετε ότι τα υποσύνολα U_1 και U_2 είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου $M_2(\mathbb{R})$ και να βρείτε μία βάση στον καθένα. (Μονάδες 1)
- (ii) Να αποδείξετε ότι: $U_1 + U_2 = M_2(\mathbb{R})$. (Μονάδες 1)
- (iii) Είναι ο διανυσματικός χώρος $M_2(\mathbb{R})$ το ευθύ άθροισμα των υποχώρων U_1 και U_2 ; (Μονάδες 0,5)

ΘΕΜΑ 3^ο Έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ δύο μοναδιαία ελεύθερα διανύσματα του χώρου Δ^3 με

$$\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \frac{\pi}{3} \text{ και } \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

- (i) Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ είναι μία βάση του Δ^3 . (Μονάδες 0,5)
- (ii) Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση $T: \Delta^3 \rightarrow \Delta^3$, όπου Δ^3 είναι το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου, με τύπο $T(\mathbf{u}) = \mathbf{a} \times \mathbf{u}$ είναι γραμμική και να βρείτε τον πίνακά της ως προς τη βάση $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$. (Μονάδες 1,5)
- (iii) Να βρείτε μία βάση του πυρήνα της T . (Μονάδες 0,5)

ΘΕΜΑ 4^ο (Α) Να ελέγξετε τότε το διάνυσμα $\mathbf{u} = (0, 2 - \lambda, -2, \lambda)$ ανήκει στον υπόχωρο $U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ του $\mathbb{R}^4$, όπου $\mathbf{u}_1 = (\lambda + 1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, \lambda + 1, 1, 1)$ και $\mathbf{u}_3 = (1, 1, \lambda + 1, 1)$. Στην περίπτωση που ισχύει $\mathbf{u} \in U$, να γραφεί το διάνυσμα $\mathbf{u}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. (Μονάδες 1,5)

(Β) Αν A, B είναι $n \times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες, να αποδείξετε ότι:

- (i) $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$,
- (ii) $\operatorname{adj}(AB) = (\operatorname{adj} B)(\operatorname{adj} A)$. (Μονάδες 1)

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 45 λεπτά.

Καλή επιτυχία