

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

3-3-2006

ΘΕΜΑ 1^ο Δίνεται η ευθεία (ε): $x - 4 = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ και τα σημεία $A(2, -3, 1)$ και $B(-1, 1, 4)$.

- (i) Ναδειχθεί ότι το σύνολο των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από τα σημεία A , και B είναι το επίπεδο (π): $3x - 4y - 3z + 2 = 0$.
- (ii) Να βρεθεί το σημείο τομής της ευθείας (ε) με το επίπεδο (π).
- (iii) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει την ευθεία (ε) και είναι κάθετο στο (π).

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο (α) Δίνονται τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + 3z = 0\}, \quad V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}.$$

Ναδειχθεί ότι τα V_1, V_2 είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$, να βρεθούν βάσεις και οι διαστάσεις των υποχώρων V_1, V_2 , $V_1 \cap V_2$, $V_1 + V_2$ και να δοθεί η γεωμετρική τους ερμηνεία.

(β) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σ' ένα σώμα K .

- (i) Να δοθεί ο ορισμός των εννοιών: «γραμμική ανεξαρτησία» και «γραμμική εξάρτηση» διανυσμάτων του χώρου V και να δώσετε για κάθε μια έννοια ένα παράδειγμα.
- (ii) Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του V . Ναδειχθεί ότι αν το στοιχείο $v \in V$ δεν ανήκει στην γραμμική θήκη των $x_1, x_2, \dots, x_n$, τότε τα $x_1, x_2, \dots, x_n, v$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, η οποία έχει πίνακα, ως προς την κανονική βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ του $\mathbb{R}^3$, τον:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

- (i) Βρείτε τον τύπο της T .
- (ii) Βρείτε μια βάση του πυρήνα και μια βάση της εικόνας της T και επαληθεύστε το Θεώρημα Διάστασης Γραμμικών Απεικονίσεων.
- (iii) Θεωρούμε τη βάση $v = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ του $\mathbb{R}^3$, όπου $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{v}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ και $\vec{v}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$. Βρείτε τον πίνακα B της T ως προς τη βάση v .

Μονάδες 2,5

Συνεχίζεται πίσω

ΘΕΜΑ 4^ο

(α) Να λυθεί το παρακάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$ax_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$ax_1 + ax_2 + ax_3 + x_4 = 0$$

(β) Να υπολογιστεί ο πίνακας A αν γνωρίζουμε ότι όλα τα στοιχεία του είναι θετικά και ότι ο συμπληρωματικός (adjoint) πίνακας του A είναι ο

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -6 & 9 & -1 \\ 8 & -12 & 2 \end{bmatrix}.$$

Μονάδες 2,5

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

Καλή επιτυχία