

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

1-9-2005

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι ο αντίστροφος ενός συμμετρικού πίνακα, αν υπάρχει, είναι επίσης συμμετρικός πίνακας.
- B.** Δίνονται τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$
 $A = \{(x, y, z) : x - y = 0, y - z = 0\}$ και $B = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$.
- (i)** Να αποδείξετε ότι τα A, B είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ και να βρείτε μία βάση σε κάθε υπόχωρο.
- (ii)** Να αποδείξετε ότι $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

ΘΕΜΑ 2^ο

- A.** Δίνεται ο $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ με $a_{ij} = i + j$ και $n \geq 2$. Να αποδείξετε ότι ο βαθμός του πίνακα A ισούται με 2.
- B.** Να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των παραμέτρων a, b, c έτσι ώστε τα επίπεδα
 $\Pi_1: 2x+3y+4z=a, \quad \Pi_2: 3x+4y+5z=b, \quad \Pi_3: 4x+5y+6z=c,$
να έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.
Για $a=1, b=2, c=3$, να αποδείξετε ότι τα επίπεδα Π_1, Π_2 και Π_3 περιέχουν την ίδια ευθεία, της οποίας να βρείτε τις αναλυτικές εξισώσεις.

ΘΕΜΑ 3^ο

- A.** Έστω U, V δύο διανυσματικοί χώροι πάνω στο σώμα K και η γραμμική απεικόνιση $T: U \rightarrow V$. Να αποδείξετε ότι η T ορίζεται πλήρως, αν είναι γνωστές οι εικόνες μιας βάσης $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ του U .
- B.** Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, έτσι ώστε
 $T(1,1,1)=T(1,1,-1)=(0,0,0)$ και $T(-1,0,1)=(2,0,-2)$.
- (i)** Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω σχέσεις ορίζουν πλήρως την T .
- (ii)** Να βρεθεί μία βάση της εικόνας $R(T) = \text{Im } T$ και μια βάση του πυρήνα $\ker T$ της T .
- (iii)** Να βρεθεί ο πίνακας της T ως προς την βάση $B = \{(1,1,1), (1,1,-1), (-1,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

*Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα.
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.*

Καλή επιτυχία