

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
20-9-2006

ΘΕΜΑ 1°

(α) Δίνονται τα διανύσματα $\mathbf{OA} = \mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k}$, $\mathbf{OB} = \mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k}$.

Έστω A_1, B_1 οι ορθές προβολές των A, B , αντίστοιχα, στο επίπεδο Oxy .

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα διανύσματα $\mathbf{OA}_1$ και $\mathbf{OB}_1$ ισούται με $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{k}|$. (μονάδες 1)

(β) Να προσδιορίσετε την εξίσωση του επιπέδου Q που περιέχει την ευθεία

$$\varepsilon: \frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{-1} \quad (\text{μονάδες 1,5})$$

και είναι κάθετο προς το επίπεδο $\Pi: 2x - 4y + 2z - 9 = 0$.

ΘΕΜΑ 2°

i) Να δώσετε τον ορισμό της βάσης και της διάστασης ενός διανυσματικού χώρου V και να αναφέρετε ένα παράδειγμα διανυσματικού χώρου με μια βάση του.

(μονάδες 0.9)

ii) Αν $\dim V = n$ να δείξετε ότι οποιαδήποτε $n+1$ το πλήθος διανύσματα του V είναι γραμμικώς εξαρτημένα. (μονάδες 0.8)

iii) Αν $\dim V = 4$ και $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$, υπάρχει διάνυσμα $\mathbf{v}$ του V τέτοιο, ώστε τα διανύσματα $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}\}$ να αποτελούν βάση του V ? Δικαιολογείστε. (μονάδες 0.8)

ΘΕΜΑ 3°

α) Έστω U, V δύο διανυσματικοί χώροι με αντίστοιχες βάσεις $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$,

$\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ και μια γραμμική απεικόνιση $T: U \rightarrow V$ τέτοια, ώστε

$$T\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \quad T\mathbf{u}_2 = 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2, \quad T\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3.$$

i) Βρείτε τον πίνακα της T ως προς τις βάσεις $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

ii) Χρησιμοποιείστε τον πίνακα αυτόν ή διαφορετικά και βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $T\mathbf{u}$, όπου $\mathbf{u} = 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 5\mathbf{u}_3$. (μονάδες 1)

β) Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 - x_2 + 3x_3, 4x_1 + x_2 + 2x_3).$$

Να βρείτε μια βάση στο καθένα από τους υπόχωρους $\text{Ker} T, \text{Im} T$.

ΘΕΜΑ 4°

(α) Δίνεται ο $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$, όπου $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i+j \text{ άρτιος} \\ 0, & \text{αν } i+j \text{ περιττός} \end{cases}$.

Να βρείτε το βαθμό του πίνακα A . (μονάδες 1)

(β) Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} x + ay + a^2z = 1 \\ x + ay + abz = a \\ bx + a^2y + a^2bz = a^2b \end{array} \right\}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (\text{μονάδες 1,5})$$

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες και 30 λεπτά
Καλή επιτυχία