

**ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1**  
**Αναλυτική Γεωμ.- Γραμ. Άλγεβρα**  
**Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 2009-10**

Να παραδώσετε λυμένες τις παρακάτω ασκήσεις:

1. Δείξτε ότι για τα διανύσματα  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  ισχύουν:  
(i)  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$  και  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}$ .  
(ii)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ .  
(iii)  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$ .  
(iv)  $((\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{b} \times \mathbf{c})(\mathbf{c} \times \mathbf{a})) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2$ .
2. Αν τα διανύσματα  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  είναι μη συνεπίπεδα, ναδειχθεί ότι και τα διανύσματα  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}$  είναι μη συνεπίπεδα.
3. Ναδειχθεί ότι για οποιαδήποτε διανύσματα  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  ισχύει:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

4. Αν  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  είναι δύο μη συγγραμμικά μοναδιαία διανύσματα, να βρεθεί το διάνυσμα  $\mathbf{u}$  που ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{b} + 4\mathbf{a} = 2\mathbf{u}.$$

5. Τα σημεία  $A, B, C, D$  έχουν διανύσματα θέσης, ως προς ένα σημείο αναφοράς  $O$ , τα  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

$$\text{Τα } A, B, C, D \text{ είναι συνεπίπεδα} \Leftrightarrow (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0.$$

6. Τα σημεία  $A, B, C$  έχουν διανύσματα θέσης, ως προς ένα σημείο αναφοράς  $O$ , τα  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $ABC$  ισούται με

$$E_{(ABC)} = \frac{1}{2}|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a})|.$$

7. Δείξτε ότι η εξίσωση:  $\mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ , όπου  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  γνωστά διανύσματα, έχει μοναδική λύση ως προς  $\mathbf{x}$ , η οποία και να βρεθεί.
8. Αν το διάνυσμα  $\mathbf{w}$  ικανοποιεί την εξίσωση  $\mathbf{a} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{a}) + \mathbf{w} = \mathbf{b}$ , όπου  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  είναι γνωστά διανύσματα, τότε:  
(i) Να δείξετε ότι είναι  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  και  $\mathbf{w} \times \mathbf{a} = \left( \frac{1}{1 + |\mathbf{a}|^2} \right) (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ .  
(ii) Να προσδιορίσετε τη λύση της εξίσωσης.
9. Έστω  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r} \in \mathcal{D}$  με  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  και  $t \in \mathbb{R}$ . Να προσδιορίσετε την τιμή του  $t$  για την οποία έχει λύση ως προς  $\mathbf{r}$  η εξίσωση

$$\mathbf{a} \times \mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση.

10. Να δείξετε ότι για τα διανύσματα  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  του  $\mathcal{D}$  ισχύουν:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{d}$$

11. Έστω  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  και  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  δύο βάσεις του  $\mathcal{D}$ . Ναδειχθεί ότι οι βάσεις

αυτές είναι **αμοιβαίες** αν και μόνο αν

$$\beta_1 = \frac{\alpha_2 \times \alpha_3}{V}, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_3 \times \alpha_1}{V}, \quad \beta_3 = \frac{\alpha_1 \times \alpha_2}{V},$$

όπου  $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ .

(Οι βάσεις λέγονται **αμοιβαίες** αν ισχύει:  $\alpha_i \cdot \beta_j = 1$  αν  $i = j$  και  $\alpha_i \cdot \beta_j = 0$  αν  $i \neq j$  για κάθε  $i, j = 1, 2, 3$ ).

12. Αν  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ ,  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  είναι δύο αμοιβαίες βάσεις ναδειχθεί ότι:

(i)  $V' = (\beta_1 \beta_2 \beta_3) = 1/V$ , όπου  $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ .

(i) Το τυχόν διάνυσμα  $\mathbf{r}$  γράφεται  $\mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \beta_1)\alpha_1 + (\mathbf{r} \cdot \beta_2)\alpha_2 + (\mathbf{r} \cdot \beta_3)\alpha_3$ .

Παράδοση μέχρι 9-11-2009

Σ. Καρανάσιος