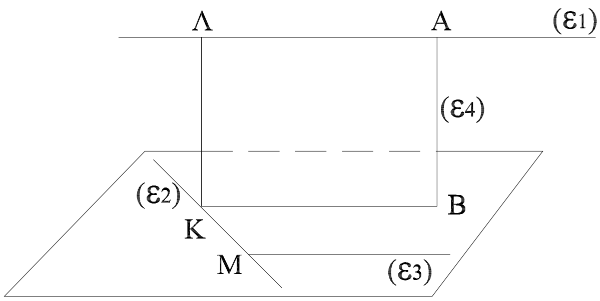
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

Αναλυτική Γεωμ.- Γραμ. Άλγεβρα

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 2009-10

Να παραδώσετε λυμένες τις παρακάτω ασκήσεις:

1. Η γεωμετρική κατασκευή της κοινής καθέτου δύο ασυμβάτων ευθειών (ε_1), (ε_2) είναι η ακόλουθη: Από τυχόν σημείο M της (ε_2) φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την (ε_1). Έστω (π) το επίπεδο που ορίζουν οι (ε_2), (ε_3). Από τυχόν σημείο A της (ε_1) φέρουμε ευθεία (ε_4) κάθετη στο (π). Από το ίχνος της B φέρουμε ευθεία BK παράλληλη προς την (ε_3), η οποία τέμνει την (ε_2) στο K. Η παράλληλη ευθεία από το K προς την (ε_4) τέμνει την (ε_1) στο Λ. Η $K\Lambda$ είναι η κοινή κάθετη των (ε_1), (ε_2).



Με οδηγό την παραπάνω κατασκευή να προσδιορίσετε τις εξισώσεις και τις συντεταγμένες όλων των γεωμετρικών στοιχείων που θα χρησιμοποιήσετε (ευθείες, επίπεδα, σημεία) για την κατασκευή της κοινής καθέτου των ασυμβάτων ευθειών:

$$(\varepsilon_1):\ \frac{x-5}{2}=\frac{y+6}{3}=\frac{z}{4}, \quad (\varepsilon_2):\ \frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=z-1.$$

Να βρείτε επίσης την ελάχιστη απόσταση των ασυμβάτων ευθειών.

2. Δίνεται το σημείο $P(1,0,3)$ και η ευθεία (ε) : $x=-y=-z$. Να βρεθεί το συμμετρικό σημείο P' του σημείου P ως προς την ευθεία (ε).

3. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1):\ \mathbf{r}=\mathbf{r}_1+t\boldsymbol{\alpha},\quad t\in\mathbb{R}$, $(\varepsilon_2):\ \mathbf{r}=\mathbf{r}_2+s\mathbf{b},\ s\in\mathbb{R}$.

(i) Δείξτε ότι: Οι (ε_1), (ε_2) είναι συνεπίπεδες $\Leftrightarrow ((\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{b})=0$.

(ii) Αν οι (ε_1), (ε_2) είναι ασύμβατες δείξτε ότι η ελάχιστη απόστασή τους είναι:

$$d=\frac{|((\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{b})|}{|\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{b}|}.$$

(iii) Αν $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{b}$, δείξτε ότι η απόσταση των (ε_1), (ε_2) είναι:

$$d=\frac{|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\times\boldsymbol{\alpha}|}{|\boldsymbol{\alpha}|}.$$

(γυρίστε σελίδα)

4. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon) : \mathbf{r} = \boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{u},\ t \in \mathbb{R}$ και σημείο M εκτός της ευθείας με διανυσματική ακτίνα $\mathbf{r}_M$. Δείξτε ότι η απόσταση του σημείου M από την ευθεία (ε) είναι:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|(\mathbf{r}_M - \boldsymbol{\alpha}) \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}.$$

Εφαρμογή: $M(1, 2, -1)$ και (ε) η ευθεία που περνά από τα σημεία $A(2, -1, 4),\ B(3, 1, 6)$.

5. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου (π) που ορίζεται από:
(i) τα σημεία $A(1, 2, 3)$, $B(0, 0, 1)$, $\Gamma(2, 0, 0)$.
(ii) το σημείο $A(1, 0, 2)$ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο (q): $x - y + 3z = 6$.
(iii) το σημείο $A(3, -1, 2)$ και είναι κάθετο στην ευθεία $(\varepsilon) : x - y + z = 3,\ 3x - z = 0$.

6. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου (π)
(i) που περιέχει τις ευθείας $(\varepsilon_1) : \mathbf{r} = \boldsymbol{\alpha} + \lambda\mathbf{b}$, $(\varepsilon_2) : \mathbf{r} = \mathbf{c} + \mu\mathbf{b}$, όπου $\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι γνωστά διανύσματα και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
(ii) που περιέχει την ευθεία $\mathbf{r} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και είναι κάθετο προς το επίπεδο που ορίζεται από τις ευθείες $\mathbf{r} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{r} = \mu\mathbf{b}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{b} \neq \overrightarrow{0}$.

7. Δίνεται η ευθεία (ε): $(\mathbf{r} - \boldsymbol{\alpha}) \times \mathbf{u} = \overrightarrow{0}$.
Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία των $\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}$;
Αν η ευθεία (ε) δίνεται ως τομή των επιπέδων $(\pi_1) : x + y + z - 1 = 0$, $(\pi_2) : 4x - 3y - z + 1 = 0$, να βρείτε τα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\mathbf{u}$ και να εξηγήσετε γιατί δεν είναι μονοσήμαντα.

8. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες

$$(\varepsilon_1) : x - 3 = 0,\ y = -2z + 10, \quad (\varepsilon_2) : \frac{x + 2}{3} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z + 1}{2},$$

είναι ασύμβατες και να βρείτε τα ίχνη και το μήκος της κοινής καθέτου.

9. Τα διανύσματα θέσης των σημείων Α, Β, Γ ως προς το Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$ είναι $\mathbf{OA} = \boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{OB} = \mathbf{b}$, $\mathbf{O\Gamma} = \mathbf{c}$, αντιστοίχως.
(i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$E_{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{1}{2}|(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{b})|.$$

(ii) Αν το επίπεδο (π): $6x - 3y - 2z - 6\alpha = 0$ τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$, $z'z$ στα σημεία Α, Β, Γ αντιστοίχως, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Παράδοση μέχρι 3-12-2009 Σ. Καρανάσιος