ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

Αναλυτική Γεωμ.- Γραμ. Άλγεβρα
Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 2009-10

1. Έστω $\nu \in \mathbb{N}^*$. Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών ορίζουμε τη σχέση «$\equiv \pmod{\nu}$» ως εξής:

$$x \equiv y (\mathrm{mod}\ \nu) \Leftrightarrow x - y = \text{ακέραιο πολλαπλάσιο του } \nu.$$

Να δείξετε ότι η «$\equiv \pmod{\nu}$» είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Z}$. Να προσδιορίσετε τις κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζονται. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι στην ίδια κλάση ανήκουν οι ακέραιοι αριθμοί οι οποίοι αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο με διαιρέτη το ν).

2. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζουμε τη σχέση S ως εξής:

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow x^2 - y^2 \leq 0.$$

Να παραστήσετε γραφικά το σύνολο S.
Όμοια αν η σχέση S ορισθεί ως: $(x, y) \in S \Leftrightarrow x^3 = x^2(y + 2)$.

3. Στο $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ορίζουμε τη σχέση «$\sim$» ως: $z \sim w \Leftrightarrow |z|(|w|^2 + 1) = |w|(|z|^2 + 1)$. Να δείξετε ότι η «$\sim$» είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{C}^*$.
Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, να παραστήσετε γραφικά την κλάση ισοδυναμίας του α.

4. Η ισότητα $x * y = x + y + x^2y^2$ ορίζει μία πράξη $*$ στο $\mathbb{R}$. Να βρείτε το ουδέτερο στοιχείο της πράξης $*$ και να δείξετε ότι κάθε στοιχείο $x \in \mathbb{R}^*$ με $x < \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ έχει δύο συμμετρικά στοιχεία, ενώ κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x > \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ δεν έχει συμμετρικό στοιχείο, ως προς την πράξη αυτή. Τα στοιχεία 0, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ έχουν συμμετρικά και ποιά;

5. Θεωρούμε το σύνολο

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

με πράξεις την «$+$» πρόσθεση πινάκων και «$\cdot$» πολ/σμό πινάκων. Να δείξετε ότι:
i) Η αλγεβρική δομή $(M, +)$ είναι αντιμεταθετική ομάδα.
ii) Η αλγεβρική δομή $(M^*, \cdot)$ είναι ομάδα.
iii) Η αλγεβρική δομή $(M, +, \cdot)$ είναι σώμα. Κατόπιν να λύσετε στο M την εξίσωση $X^2 + I = \mathbb{O}$.

6. Έστω η ομάδα $(G, \cdot)$.
i) Να δείξετε ότι για κάθε $a, b \in G$ ισχύει: $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$, όπου με x^{-1} συμβολίζουμε το συμμετρικό (αντίστροφο) του $x \in G$.
ii) Αν ισχύει η σχέση $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ για κάθε $a, b \in G$, να δείξετε ότι η ομάδα G είναι αντιμεταθετική.

7. Ο δακτύλιος $(\Delta, +, \cdot)$ λέγεται δακτύλιος του Boole αν ισχύει: $x^2 = x$ για κάθε $x \in \Delta$. Να δείξετε ότι κάθε δακτύλιος του Boole είναι αντιμεταθετικός και ισχύει $x + x = 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

8. Έστω $(G, \cdot)$ μία ομάδα και $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$. Το H λέγεται **υποομάδα** της G αν το H είναι ομάδα ως προς την πράξη $\cdot$ της G.
Να δείξετε ότι ένα υποσύνολο $H \neq \emptyset$ της ομάδας G είναι υποομάδα της G αν και μόνο αν ισχύει $x \cdot y^{-1} \in H$ για κάθε $x, y \in H$, όπου y^{-1} είναι το συμμετρικό του $y \in G$.

Παράδοση προαιρετική Σ. Καρανάσιος