ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ
Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 2009-10

Να παραδώσετε λυμένες, ως εργασία, τις ασκήσεις: 1, 2, 4, 6, 8, 11.

1. Έστω S ο υπόχωρος του R^3 που παράγεται από τα διανύσματα $\alpha = (2, 1, 0)$ και $\beta = (1, 0, -1)$. Βρείτε ένα διάνυσμα $\xi \in R^3$: $R^3 = S \oplus [\xi]$, όπου $[\xi] =< \xi >$ η γραμμική θήκη του $\{\xi\}$. Δώστε μια γεωμετρική εξήγηση για την εκλογή του ξ.

2. Για ποιες τιμές του λ το διάνυσμα $(1, -2, \lambda)$ του R^3 είναι στοιχείο του υποχώρου που παράγεται από τα διανύσματα $(3, 0, -2)$ και $(2, -1, -5)$;

3. Να βρείτε μια βάση και τη διάσταση του δ.χ. που παράγεται από τα διανύσματα $x_1 = (1, 1, 1, 1, 0), x_2 = (1, 1, -1, -1, -1), x_3 = (2, 2, 0, 0 - 1), x_4 = (1, 1, 5, 5, 2), x_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$ του R^5.

4. Αν U, V είναι υπόχωροι του R^4 που παράγονται από τα σύνολα $A = \{(4, -3, 2, 0), (7, 0, 5, 3)\}$ και $B = \{(2, -5, 3, 1), (5, -2, 6, 4), (7, -7, 4, 5)\}$
αντίστοιχα, βρείτε τον χώρο $U \cap V$ και κατόπιν μια βάση του $U + V$.

5. Στον Διανυσματικό χώρο R^4, θεωρούμε τους υποχώρους:
$V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = 0\}$,
$V_2 = [(2, -2, 2, -2), (1, 2, -2, -4), (4, 0, 0, -8)]$,
$V_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_2 + x_3 = 0\}$.
Να δείξετε ότι είναι $V_1 \subset V_2 \subset V_3$ και ότι υπάρχει βάση $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}\}$ του R^4 τέτοια, ώστε $\{\mathbf{x}\}$ είναι βάση του V_1, $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ είναι βάση του V_2, $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ είναι βάση του V_3.

6. Να εξετάσετε αν τα σύνολα:
$P = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, \cdots, 1 + x + x^2 + \cdots + x^\nu\}$,
$Q = \{1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, \cdots, x^{\nu-1} + x^\nu\}$
είναι βάσεις του δ.χ. $\mathcal{P}_\nu$ των πολυωνυμικών συναρτήσεων βαθμού $\leq \nu$.

7. Δίνεται ο δ.χ. F_R των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το R.
i) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $\sin^4 x$, $\cos^4 x$ ανήκουν στον υπόχωρο που παράγεται από το σύνολο $\{1, \cos 2x, \cos 4x\}$.
ii) Για οποιαδήποτε $k_1, k_2 \in R$ με $k_1 \neq k_2$, $|k_1| + |k_2| \neq 0$, οι συναρτήσεις $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του F_R.

8. Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως **αληθή** ή **ψευδή** δικαιολογώντας την απάντησή σας.
i) $U = \{(x, y) \in R^2 : x < y\}$ είναι υπόχωρος του R^2.
ii) Αν $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ είναι βάση του R^3 και $v \in R^3 \setminus \{0, 0, 0\}$, τότε και το σύνολο $\{v + \alpha, \beta, \gamma\}$ είναι επίσης βάση του R^3.
iii) Αν $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα του R^n, τότε $k < n$.
iv) Αν $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του R^n, τότε $k \geq n$.
v) Ο υπόχωρος $[(1, 2, 1), (2, 2, 1)]$ του R^3 είναι ίσος με τον υπόχωρο $U = \{(2x, 2x + 2y, x + y) : x, y \in R\}$.

9. Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι υπόχωροι του R^4;
a) $U = \{(x, y, z, w) : x + y = z + w\}$
b) $V = \{(x, y, z, w) : x + y = 1\}$
c) $W = \{(x, y, z, w) : x^2 + y^2 = 0\}$

γυρίστε σελίδα

d) $Z = \{(x+2y, 0, 2x-y, y) : \ x, y \in R\}$

10. Έστω V δ.χ. πάνω στο σώμα $K = R$ ή C και $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αποτελούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες, ώστε το σύνολο U να είναι υπόχωρος του V

i) Για κάθε $x, y \in U$ και για κάθε $\lambda \in R$, ισχύει: $\lambda x + y \in U$

ii) Για κάθε $x, y \in U$ και για κάθε $\lambda \in R$, ισχύει: $\lambda x + \lambda y \in U$

iii) Για κάθε $x, y \in U$ και για κάθε $\lambda \in R$, ισχύει: $\lambda x - \lambda y \in U$

11. Έστω V ο υπόχωρος του R^4 που παράγεται από το σύνολο

$A = \{(2,2,1,3), (7,5,5,5), (3,2,2,1), (2,1,2,1)\}$.

Αν το $x = (6+\lambda, 1+\lambda, -1+\lambda, 2+\lambda)\} \in V$, να βρείτε το λ. Για την τιμή του λ που θα βρείτε, το αντίστοιχο x έχει μοναδική γραφή ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του A; Να βρείτε μια βάση του V και να την επεκτείνετε σε μια βάση του R^4.

Παράδοση μέχρι 7-1-2010

Σ.Καρανάσιος