

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5 (Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.)

Γραμμικές Απεικονίσεις 2009-10

1. Να βρεθεί ο πίνακας αλλαγής βάσης από την $u = \{u_1 = (1, -1, 0), u_2 = (-1, 2, 1), u_3 = (0, -2, 1)\}$ στην κανονική του διανυσματικού χώρου R^3 . Να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $x = (1, -1, 2)$ ως προς τη βάση u .

2. Δίνεται ο χώρος R^3 με βάση την $\{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, -1, 0), u_3 = (1, 1, -2)\}$ και μια γραμμική απεικόνιση $T: R^3 \rightarrow R^3$ που έχει πίνακα, ως προς τη βάση αυτή, τον

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Να βρεθεί ο τύπος της } T. \text{ (Δηλ. η εικόνα του τυχόντος διανύσματος$$

(x_1, x_2, x_3) ως προς την κανονική βάση.)

3. Ο πίνακας ενός γραμ. μετασχηματισμού $T \in L(R^3)$ ως προς τη βάση $u = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, 0, 1)\}$ είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Βρείτε τον πίνακα του } T \text{ ως προς τη βάση } v = \{v_1 = (2, 1, 1), v_2 = (3, 0, 1),$$

$v_3 = (0, 1, 3)\}.$

4. Ο πίνακας ενός γραμμικού μετασχηματισμού $T \in L(R^3)$ ως προς τη βάση $e = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (1, 1, 0), e_3 = (1, 1, 1)\}$ είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Βρείτε τον τύπο του } T.$$

5. Δείξτε ότι ο γραμμικός μετασχηματισμός $T \in L(R^3): T(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$ είναι αντιστρέψιμος και βρείτε τον αντίστροφό του.

6. Βρείτε μια γραμμική απεικόνιση $T: R^3 \rightarrow R^3$ τέτοια ώστε: $T(1, 2, -1) = (1, 0)$, $T(2, 1, 4) = (0, 1)$. Δείξτε ότι κάθε τέτοια απεικόνιση στέλνει το $(1, 1, 1)$ σ' ένα σταθερό σημείο $u_0 \in R^3$.

7. Εστω ο γραμμικός μετασχηματισμός $T: R^2 \rightarrow R^2$ τέτοιος ώστε: $T(1, 1) = (-2, 0)$ και $T(0, 1) = (-1, 1)$.

i) Βρείτε τον πίνακα του T : **α)** ως προς την κανονική βάση. **β)** ως προς τη βάση $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_2$.

ii) Δείξτε ότι υπάρχει ο T^{-1} και βρείτε τον πίνακα του T^{-1} ως προς την κανονική βάση.

8. Εστω η γραμμική απεικόνιση $D: P_n \rightarrow P_n: D p(t) = p'(t)$ (παράγωγος). Να βρεθεί ο πίνακας της T ως προς τη βάση i) $\{1, t^1, t^2, \dots, t^n\}$. ii) $\{1, 1+t, 1+t^2, \dots, 1+t^n\}$.

9. Εστω η ευθεία (ε): $x=t, y=2t, z=3t, t \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ που απεικονίζει κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$ στην ορθή προβολή του στην ευθεία (ε).

i) Να προσδιοριστεί η T .

ii) Ναδειχθεί ότι είναι γραμμική και να βρεθεί ο πίνακός της ως προς την κανονική βάση.

iii) Να βρεθεί μια βάση του πυρήνα της T . Είναι η T «1-1»;

iv) Τί παριστάνει γεωμετρικά ο πυρήνας της T ;

10. Δίνονται οι απεικονίσεις $D, T: P \rightarrow P$, $D(f) = f'$ και $T(f) = tf$.

i) Δείξτε ότι είναι γραμμικές απεικονίσεις και υπολογίστε την απεικόνιση $D \circ T - T \circ D$.

ii) Δείξτε ότι είναι $(T \circ D)^2 = T \circ D + T^2 \circ D^2$.

Παράδοση μέχρι 14-1-2010

Σ. Καρανάσιος