

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΑΝΑΛ. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Επαναληπτική Εξέταση - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2003

Να απαντήσετε και στα 4 παρακάτω θέματα :

1. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{3}$ και $(\varepsilon_2): x-y+2z-6=0, 2x+y-3z-1=0$. Να δείξετε ότι τέμνονται και να βρείτε το σημείο M της τομής τους. Κατόπιν να βρείτε την ορθή προβολή M_0 του σημείου M στο επίπεδο $(\pi): x+y-z=0$.

2. (α) Ναδειχθεί ότι η τομή δύο υποχώρων V_1, V_2 ενός διανυσματικού χώρου V , είναι επίσης υπόχωρος του V .

(β) Θεωρούμε τους υποχώρους του $\mathbb{R}^4$:

V_1 που παράγεται από τα διανύσματα $(1,-2,3,-1), (2,-1,4,5)$ και

V_2 που παράγεται από τα διανύσματα $(1,1,2,3), (4,-2,9,7), (5,-1,11,10)$.

Να βρείτε μία βάση του υποχώρου $V_1 + V_2$ και την διάσταση του υποχώρου $V_1 \cap V_2$.

3. (α) Έστω U, V δύο διανυσματικοί χώροι και $T: U \rightarrow V$ μία γραμμική απεικόνιση, «1-1» και «επί». Αν $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ είναι μία βάση του U , να δείξετε ότι το σύνολο $\{T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_k)\}$ είναι μία βάση του V .

(β) Έστω η γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε: $T(-1,1)=(2,1,1), T(0,-1)=(-1,0,1)$. Να βρεθούν:

(i) Ο τύπος της T . (ii) Ο πίνακας της T ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

4. Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{aligned}\lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \quad (\Sigma) \\ x + y + \lambda z &= \lambda^2\end{aligned}$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

Καλή επιτυχία.