

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜ. ΜΑΘ/ΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΗ Α ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
Παρασκευή 7/3/2003, ώρα 3.00

ΘΕΜΑ 1.(α) Αν $\vec{a} \neq \vec{0}$ να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{x}$ που ικανοποιούν την εξίσωση $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$.

(β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το συμμετρικό P' του σημείου $P(1, 0, -2)$ ως προς το επίπεδο $x - 2y + 3z + 1 = 0$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία που περνάει από τα σημεία $A(2, 3, 5)$, $B(0, 1, -2)$.

ΘΕΜΑ 2.(α) Έστω $u_1, u_2, \dots, u_k$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του διανυσματικού V και $u_{k+1} \in V$ τέτοιο ώστε $u_{k+1} \notin [u_1, u_2, \dots, u_k]$. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(β) Δίνονται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$

$$U_1 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}, \quad U_2 = \{(x, y, z) : x = y = \frac{z}{m}, m \neq 0\}.$$

Να βρείτε μία βάση σε καθένα από τους υπόχωρους $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ και $U_1 + U_2$.
Πότε ισχύει η ισότητα $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^3$;

ΘΕΜΑ 3.(α) Έστω A, B είναι $n \times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{adj}(AB) = (\text{adj}B)(\text{adj}A).$$

(β) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να λύσετε το σύστημα :

$$\begin{aligned} 2x + 2y - z &= 0 \\ -2x - (\lambda + 2)y + (\lambda + 1)z &= 0 \\ 4x + (4 - 3\lambda)y + (3\lambda - 2)z &= 0 \quad (\Sigma) \\ \lambda(\lambda + 1)x + \lambda^2 y &= 0 \end{aligned}$$

Σε κάθε περίπτωση να προσδιορίσετε το διανυσματικό χώρο των λύσεων του (Σ) , να βρείτε μία βάση του και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

ΘΕΜΑ 4. Δίνεται ότι ο γραμμικός μετασχηματισμός $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$T(x, y, z) = (y - z, 2y, x - 2y + z).$$

(α) Να αποδείξετε ότι ο T είναι αντιστρέψιμος και να βρείτε τον αντίστροφό του

(β) Να βρείτε τον πίνακα του T ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, αλλά και ως προς τη βάση $\tilde{u} = \{\varepsilon_1 = (1, 1, 1), \varepsilon_2 = (0, 1, 1), \varepsilon_3 = (0, 0, 1)\}$.

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα

Διάρκεια εξέτασης : 3 ώρες

Καλή επιτυχία