

Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Μάθημα: «Γραμμική Άλγεβρα»

Φεβρουάριος 2001

Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ 1: Δίνεται η απεικόνιση: $T: R^4 \rightarrow R^3$ με τύπο

$$T(x, y, z, w) = (x - 3y + 4z + 2w, -2x + y - 3z + w, -x - 2y + z + 3w)$$

Να βρεθεί η διάσταση και μια βάση: **1)** του πυρήνα $\text{Ker}T$ ($N(T)$) της T . **2)** του συνόλου τιμών $R(T)$ ($\text{Im}T$).

ΘΕΜΑ 2: Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = z \end{cases}, \quad (\varepsilon_2): \begin{cases} x + 5z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

- 1)** Ναδειχθεί ότι είναι ασύμβατες. **2)** Να βρεθούν τα επίπεδα π_1, π_2 που ορίζονται από την αρχή O και τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα. **3)** Να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από την αρχή και τέμνει τις ε_1 και ε_2 .

ΘΕΜΑ 3: Δίνεται το σύστημα:

$$(\Sigma): \begin{cases} x + 2y + z - w = \alpha \\ 2x + 5y - z = \beta \\ 3x + 7y - w = \gamma \end{cases}$$

- 1)** Να βρεθεί συνθήκη για τα α, β, γ ώστε το σύστημα να είναι συμβιβαστό (να έχει λύση).
2) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου $U = \{(\alpha, \beta, \gamma) : \text{το } (\Sigma) \text{ είναι συμβιβαστό}\}$.
3) Να λυθεί το σύστημα για $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 2)$.

ΘΕΜΑ 4: 1) Έστω διανυσματικός χώρος V και U ένας υπόχωρός του. Αν $\{u_1, u_2, u_3\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του U και $v \in V, v \notin U$, ναδειχθεί ότι τα $\{u_1, u_2, u_3, v\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του V .

- 2)** Έστω U, V διανυσματικοί χώροι και $T: U \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Ναδειχθεί ότι: **α)** Αν $\dim U < \dim V$ τότε η T δεν είναι «επί» (δηλ. $T(U) \neq V$). **β)** Αν $\dim U > \dim V$ τότε η T δεν είναι «1-1».

.....
↙ **Μόνο για τους επανεξεταζόμενους** ↘

ΘΕΜΑ 5: 1) Ένας 4×4 πίνακας A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές: $-1, 2$ και 3 . Αν ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής 3 έχει διάσταση δύο, να εξετασθεί αν ο πίνακας A διαγωνοποιείται.

- 2)** Να βρεθεί μια διαγωνοποίηση του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ με ορθογώνιο πίνακα.

! Οι εξεταζόμενοι για πρώτη φορά στο μάθημα: απαντούν στα τέσσερα πρώτα θέματα.

! Οι επανεγγραφέντες στο μάθημα απαντούν στο ΘΕΜΑ 5 και σε τρία από τα θέματα: 1, 2, 3 ή 4.

Διάρκεια εξέτασης 3Ω

Καλή επιτυχία