

**ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2002**

Να απαντήσετε και στα 4 παρακάτω θέματα :

- 1.(α) Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου (Π) , που είναι κάθετο στο επίπεδο (Σ) με εξίσωση $x-y+z=1$ και περιέχει την ευθεία (ε): $x=y=t, z=1, t \in \mathbb{R}$.
- (β) Δίνονται τρία μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ του χώρου των ελεύθερων διανυσμάτων Δ^3 . Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\chi} \in \Delta^3$ που είναι τέτοια ώστε να ισχύει $\vec{\chi} \cdot \vec{\alpha} = \vec{\chi} \cdot \vec{\beta} = \vec{\chi} \cdot \vec{\gamma} = 0$, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις :
- (ι) Τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι μη συνεπίπεδα.
- (ιι) Τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα και τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά.
- (ιιι) Τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά.

- 2.(α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα διαστάσεως που συνδέει τις διαστάσεις των υποχώρων $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ και $V_1 + V_2$.

(β) Θεωρούμε τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^5$:

$$V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 - x_3 - x_4 = 0\},$$

$$V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_2 = x_3 = x_4, x_1 + x_5 = 0\}$$

Να αποδείξετε ότι είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^5$ και να βρείτε βάσεις και τις διαστάσεις των υποχώρων $V_1, V_2, V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$.

- 3.(α) Έστω U διανυσματικός χώρος και $T: U \rightarrow U$ μία γραμμική απεικόνιση. Αν ο πυρήνας $N(T) = \ker T$ της T είναι ο μηδενικός υπόχωρος (δηλαδή $N(T) = \ker T = \{0\}$) και τα $u_1, u_2, \dots, u_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του U , να αποδείξετε ότι και τα διανύσματα $T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_k)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(β) Η γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ έχει πίνακα της τον

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

ως προς τη βάση $u = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, 0, 1)\}$ του $\mathbb{R}^3$.

- (ι) Να βρείτε τον πίνακα της T , ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.
- (ιι) Να βρείτε μία βάση του πυρήνα και μία βάση της εικόνας της T .

- 4.(α) Έστω $AX=B$ (1), ένα $m \times n$ γραμμικό σύστημα. Αν είναι $\Lambda_0 = \{X \in M_{n \times 1} : AX=B\}$ το σύνολο των λύσεων του (1), $\Lambda = \{X \in M_{n \times 1} : AX=O\}$ είναι το σύνολο των λύσεων του αντι-στοίχου ομογενούς και $\xi \in \Lambda$ είναι μία λύση του (1) να αποδείξετε ότι $\Lambda = \{\xi + \xi_0 : \xi_0 \in \Lambda_0\} = \xi + \Lambda_0$.

(β) Δίνεται το σύστημα

$$\begin{aligned}2x+5y+5z+6w &= \alpha \\ x+3y+4z+4w &= \beta \\ -3x-5y-4w &= \gamma \\ x+2y+z+2w &= \delta\end{aligned}\quad (\Sigma)$$

(ι) Να βρεθούν οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το (Σ) να είναι συμβιβαστό.

(ιι) Να βρεθεί μία βάση του υπόχωρου

$$U = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : \text{το } (\Sigma) \text{ είναι συμβιβαστό}\}.$$

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

Καλή επιτυχία.