

ΣΕΜΦΕ 2ο Εξάμηνο κανονική εξέταση - Ιούνιος 2013 (17-6-13)
Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές

Ονοματεπώνυμο

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. α) Έστω M ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (1, 0, -1, 2)$ και $v_2 = (-1, 1, 1, 0)$.

i) Να βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $M^\perp$ του M καθώς και μια ορθοκανονική βάση του $M^\perp$.

ii) Να βρείτε την ορθή προβολή του διανύσματος $v = (0, 1, 0, 1)$ στον υπόχωρο M .

β) Να αποδειχθεί ότι δύο όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

Θ2. α) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Να αποδείξετε ότι ένας γραμμικός μετασχηματισμός $T : V \rightarrow V$ είναι ισομετρικός αν και μόνο αν απεικονίζει μια ορθοκανονική βάση του V σε ορθοκανονική.

β) Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ο $\mathbb{R}^3$ θεωρείτε με την κανονική του βάση) με

$$T(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{6}}z, \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{6}}z, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z \right).$$

1. Να εξετάσετε αν ο T είναι ισομετρικός.

2. Να βρείτε τον T^* . Είναι ο T αυτοσυζυγής; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Θ 3. α) Βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha - 2 & \alpha + 1 & -\alpha \\ -2\alpha - 2 & 2\alpha + 1 & -2\alpha + 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

είναι διαγωνοποιήσιμος (μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας) και για ποιες όχι. Έπειτα, για τις τιμές του για τις οποίες ο A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος, κατασκευάστε πλήρως την κανονική μορφή Jordan και τον αντίστοιχο πίνακα ομοιότητας.

Θ 4. α) Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Να αιτιολογήσετε γιατί ο A διαγωνοποιείται από ορθογώνιο πίνακα και να βρείτε έναν ορθογώνιο πίνακα Q και έναν διαγώνιο πίνακα Δ ώστε να ισχύει: $A = Q\Delta Q^T$.

β) Δίνεται η εξίσωση $-3y^2 - 4xy + 2xz + 4yz - 2x - 2z + 1 = 0$. Να εξετάσετε αν η επιφάνεια που περιγράφει η εξίσωση έχει κέντρο συμμετρίας και κατόπιν με κατάλληλη αλλαγή συστήματος συντεταγμένων να αναγνωρίσετε το είδος της επιφάνειας που παριστάνει.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ